Lineare Algebra I
(Inoffizielle) Probeklausur

Tutoren der Linearen Algebra I

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

BITTE LEST DEN GANZEN TEXT

Bearbeitungsvorschlag:
Wir raten euch dringend ein Klausurszenario nachzustellen und alle Aufgaben eigenständig und ohne Hilfsmittel über einen Zeitraum von 120 Minuten zu bearbeiten.
Falls ihr in diesen 120 Minuten nicht fertig werdet, dann empfehlen wir euch, eure Lösung dennoch abzugeben - oder den Rest außerhalb dieser Zeit zu bearbeiten[1].
Tipps und Hinweise zur Bearbeitung findet ihr auch unter https://antonzakrewski.github.io/ - auf dieser Seite werden wir auch das pdf der Klausur hochladen.

Abgabe:
Eure Lösung kann digital über eure campus.lmu Mailadresse an alle Tutoren bis zum 03.01.2025 per E-Mail an die folgende Adresse verschickt werden: la1-probeklausur@web.de
Gebt eure Lösung bis zum 03.01.2025 als PDF-Datei benannt nach Schema vorname_nachname.pdf ab[2].
Wir werden versuchen, diese Probeklausur so zu korrigieren, wie wir auch die echte Klausur korrigieren würden. Gebt eure Lösungen also stets mit Lösungsweg an. Orientiert euch bei der Ausführlichkeit eurer Lösungen an der Vorlesung. Ihr dürft Aussagen aus der Vorlesung, den Übungsblättern und den Tutoriumsblättern verwenden, müsst das aber an dieser Stelle kennzeichnen.
Wenn ihr möchtet, dass diese Abgabe von einer bestimmten Person korrigiert wird, schreibt das sowohl auf die Abgabe als auch in den Betreff der Mail. Wir werden versuchen, diesen Wünschen, soweit möglich, nachzukommen. Es bietet sich an, den eigenen Tutor zu wählen, damit dieser eventuell im Tutorium personalisiertes Feedback geben kann.
Falls wir mehr Abgaben erhalten, als erwartet, werden wir nur ausgewählte Aufgaben korrigieren. In jedem Fall werden wir fristgerechte Abgaben bevorzugt korrigieren.

Form:
Da wir das in unserer Freizeit machen, behalten wir uns vor unsaubere Abgaben nicht zu korrigieren, damit wir wirklich mit korrigieren und nicht mit entziffern beschäftigt sind. Eine saubere Abgabe beinhaltet:

- Eure E-Mail Adresse im PDF
- Lesbare Schrift
- Nummerierte Abgaben
- Keine Schmierzettel
- Dunkle Schrift auf hellem Hintergrund

[1] und euch für eine stimmige Selbsteinschätzung zu merken, welchen Teil ihr außerhalb der regulären Zeit gelöst habt und somit in einer echten Klausur nicht geschafft hättet.
[2] sehr gerne auch mit LaTeX.

Disclaimer:
Das ist keine offizielle Probeklausur, insofern sind alle Angaben ohne Gewähr und die (komplett freiwillige) Abgabe, sowie Korrektur haben keinerlei Einfluss auf das Vorlesungs- oder Übungsmodul zur linearen Algebra. Die echte Klausur wird nicht von uns erstellt und keiner von uns hat die echte Klausur bisher gesehen. Somit können wir auch keine Aussage darüber treffen, wie ähnlich diese Aufgaben zu den Klausuraufgaben sind. Wir haben uns an Aufgaben aus Altklausuren der letzten Jahre orientiert.
Die Weitergabe der Probeklausur ist erlaubt und erwünscht. Wenn ihr irgendjemanden kennt, der daran Interesse haben könnte, dann leitet sie also gern weiter.
Da das Semester noch nicht zu Ende ist und somit noch nicht der gesamte Stoff behandelt wurde, deckt diese Probeklausur natürlich den Teil der Vorlesung, der im neuen Jahr drankommt, nicht ab.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume und sei $U = U_1 + U_2$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Seien $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sodass $u_1 + u_2 = 0$ gilt, dann ist $u_1 = u_2 = 0$.
2. Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ für $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ eindeutig.
3. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $a \in G$. Wir definieren die Abbildungen $f_a : G \to G, f_a(x) := x * a$ und $g : G \to G, g(x) := x^{-1}$.

1. Zeige: f_a und g sind bijektive Abbildungen.
2. Ist f_a bzw. g ein Homomorphismus?
3. Wir definieren
$$\mathcal{G} = \{f_a \mid a \in G\}.$$
Zeige, dass $\mathcal{G}$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass die n-ten komplexen Einheitswurzeln
$$\{w_n^k \mid k = 0, \ldots, n-1\}$$
mit $w_n = \exp(2\pi i/n)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation bilden.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 Punkte)
Es seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
gegeben.

1. Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig?
2. Bestimme $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$.
3. Gib eine Basis für den Vektorraum $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ an.

Aufgabe 5 (1 + 3 + 2 Punkte)
Es seien
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
gegeben.

1. Zeige, dass w_1, w_2, w_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.
2. Bestimme die beiden Basiswechselmatrizen zwischen der Standardbasis e_1, e_2, e_3 und w_1, w_2, w_3.

3. Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2 + x_3, 7x_1)$$

gegeben. Bestimme die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basen (w_1, w_2, w_3) nach (e_1, e_2, e_3).

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Untenstehend sind 10 mathematische Aussagen. Kreuze an, ob diese wahr oder falsch sind (Eine Aussage ist wahr, wenn sie immer gilt. Eine Aussage ist falsch, wenn es mindestens ein Gegenbeispiel gibt.), die Antworten müssen nicht begründet werden.
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt.

		Wahr	Falsch
(i)	Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums ist linear unabhängig.	◯	◯
(ii)	Ist X eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums, so ist jede Teilmenge von X wieder linear unabhängig.	◯	◯
(iii)	Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V)$, so ist $U = V$.	◯	◯
(iv)	Die Vektoren $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)$ bilde eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$.	◯	◯
(v)	Es gibt einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der genau zwei Vektoren enthält.	◯	◯
(vi)	Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen nichtleeren Mengen, und ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.	◯	◯
(vii)	Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen nichtleeren Mengen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.	◯	◯
(viii)	Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen, und ist $U \subseteq X$, so ist $f^{-1}(f(U)) = U$.	◯	◯
(ix)	Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen, und ist $V \subseteq Y$, so ist $f(f^{-1}(V)) = V$.	◯	◯
(x)	Es gibt mindestens einen $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	◯	◯