Lineare Algebra I

Lösung zur (inoffiziellen) Probeklausur

Tutoren der Linearen Algebra I

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume und sei $U = U_1 + U_2$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Seien $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sodass $u_1 + u_2 = 0$ gilt, dann ist $u_1 = u_2 = 0$.
2. Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ für $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ eindeutig.
3. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Lösung:

$1 \Rightarrow 2$ Sei $u \in U$ mit den Darstellungen $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in U_1, u_2, v_2 \in U_2$. Dann gilt

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = 0$$

Wir haben also Vektoren $u_1 - v_1 \in U_1$ und $u_2 - v_2 \in U_2$ deren Summe 0 ergibt. Laut Annahme sind dann beide Vektoren gleich 0, also gilt $u_1 = v_1$ und $u_2 = v_2$. Wann immer wir zwei Darstellungen für einen Vektor u finden, sind sie demnach gleich. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass jeder Vektor $u \in U$ eine eindeutige Darstellung besitzt.

$2 \Rightarrow 3$ Sei $v \in U_1 \cap U_2$, dann ist offenbar $v \in U_1$ und $v \in U_2$ und es gilt $0 = v - v$. Wir wissen aber auch, dass $0 = 0 + 0$ mit $0 \in U_1, 0 \in U_2$ gilt. Da die Darstellung eines Vektors eindeutig ist, folgt daraus bereits $v = 0$.

$3 \Rightarrow 1$ Seien $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, sodass $u_1 + u_2 = 0$. Das bedeutet $u_1 = -u_2$. Da Vektorräume bezüglich der Multiplikation abgeschlossen sind, liegt damit auch $u_1 \in U_2$, also in $U_1 \cap U_2$. Da dieser Raum laut Annahme trivial ist, gilt $u_1 = 0$ und damit auch $u_2 = 0$.

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $a \in G$. Wir definieren die Abbildungen $f_a : G \to G, f_a(x) := x * a$ und $g : G \to G, g(x) := x^{-1}$.

1. Zeige: f_a und g sind bijektive Abbildungen.
2. Ist f_a bzw. g ein Homomorphismus?
3. Wir definieren
$$\mathcal{G} = \{f_a \mid a \in G\}.$$
Zeige, dass $\mathcal{G}$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet.

Lösung:

1. G ist eine Gruppe, folglich hat jedes Element ein inverses. Wir benutzen das um die Bijektivität zu zeigen:

   f_a Seien $x, y \in G$ gegeben, sodass $f_a(x) = f_a(y)$, also $x * a = y * a$. Wir können diese Gleichung von rechts mit a^{-1} multiplizieren und erhalten $x = y$, also ist f_a injektiv.
   Sei nun $y \in G$ gegeben, wir suchen ein Urbild. Es gilt $f_a\left(y * a^{-1}\right) = y * a^{-1} * a = y$, also ist $y * a^{-1}$ ein geeignetes Urbild und f_a surjektiv. Zusammen sehen wir, dass f_a bijektiv ist.

   g Wir wissen, dass inverse Elemente eindeutig sind. Gilt also für $x, y \in G$, dass $x^{-1} = g(x) = g(y) = y^{-1}$, dann folgt daraus bereits, dass $x = y$ gilt und die Abbildung ist injektiv.
   Jedes Element hat ein Inverses und das Inverse eines Inversen ist wieder das Element selbst. Wir wählen für ein gegebenes $x \in G$ also x^{-1} und sehen, dass $g\left(x^{-1}\right) = \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, das heißt die Abbildung ist surjektiv. Zusammen bedeutet das, dass g bijektiv ist.

2. f_a Wir konstruieren ein Gegenbeispiel: Sei $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ und sei $a = 3$. Dann gilt:

   $$f_3(1+1) = 1+1+3 = 5 \neq 8 = 1+3+1+3 = f_3(1) + f_3(1)$$

   also ist f_3 kein Homomorphismus. Die Aussage ist also im Allgemeinen falsch.[1]

   g Wir betrachten zwei Elemente $x, y \in G$, dann gilt:

   $$g(x * y) = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

   im Allgemeinen gilt $y^{-1} * x^{-1} \neq x^{-1} * y^{-1} = g(x) * g(y)$, also ist g kein Homomorphismus.[2]

3. Um zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ eine Gruppe ist, müssen wir Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements und Existenz der inversen Elemente zeigen. Die Gleichheit von Abbildungen f_a, f_b zeigen wir jeweils, indem wir überprüfen ob sie auf jedes Element $x \in G$ gleich wirken.

   (a) Seien $a, b \in G$, dann gilt für ein beliebiges Element $x \in X$, dass

   $$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(x * b) = x * b * a = f_{b*a}(x)$$

   Da $b * a \in G$ liegt, gilt $f_{b*a} \in \mathcal{G}$, also ist unsere Verknüpfung abgeschlossen.

   (b) Die Assoziativität von Abbildungen ist eine allgemeine Aussage, also gilt sie auch für Elemente aus $\mathcal{G}$.

   (c) Sei $e_G \in G$ das neutrale Element von G, dann gilt für $a \in G$

   $$f_a \circ f_{e_G} = f_{e_G * a} = f_a$$

   also ist f_{e_G} das neutrale Element von $\mathcal{G}$.

   (d) Sei $a \in G$, dann suchen wir ein Element $b \in G$, sodass $f_a \circ f_b = f_{e_G}$, da aber $f_a \circ f_b = f_{b*a}$ gilt, ist diese Bedingung erfüllt, wenn wir $b = a^{-1}$ wählen.

   Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{G}$ eine Gruppe ist.

[1] f_a ist aber ein Homomorphismus, wenn a das neutrale Element der Gruppe G ist.
[2] g ist genau dann ein Homomorphismus, wenn G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass die n-ten komplexen Einheitswurzeln

$$\{w_n^k \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

mit $w_n = \exp(2\pi i/n)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation bilden.

Lösung:
Wir definieren die k-te Einheitswurzel $\zeta_k = w_n^k$(Sprich: zeta) und die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln $\mu_n = \{\zeta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$:[3]

$$\zeta_k = w_n^k = \exp(2\pi i/n)^k = \exp(2k\pi i/n)$$

Wir zeigen die Eigenschaften einer Gruppe: Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements, Existenz inverser Elemente und zusätzlich Kommutativität:

1. Seien $\zeta_k, \zeta_l \in \mu_n$, dann gilt

$$\zeta_k \cdot \zeta_l = \exp(2k\pi i/n) \cdot \exp(2l\pi i/n) = \exp(2(k+l)\pi i/n) = \zeta_{k+l}$$

   also liegt das Produkt wieder in μ_n.

2. Alle Elemente in μ_n sind Elemente von $\mathbb{C}$, also ist die Multiplikation assoziativ.

3. Es gilt $\zeta_0 = \exp(0) = 1$, also ist ζ_0 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

4. Es gilt für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$, dass $\zeta_k \cdot \zeta_{n-k} = \zeta_n = 1$, also ist ζ_{n-k} das inverse zu ζ_k.

5. Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist kommutativ, also ist auch die Multiplikation in μ_n kommutativ.

Folglich ist μ_n eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 Punkte)
Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben.

1. Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig?

2. Bestimme $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

3. Gib eine Basis für den Vektorraum $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ an.

Lösung:

1. Da v_1, v_2, v_3, v_4 vier Vektoren in einem 3-dimensionalen Vektorraum sind, können sie nicht linear unabhängig sein.

[3] Da $\exp(2n\pi i/n) = \exp(2\pi i) = 1$ gilt, können wir prinzipiell mit $k \in \mathbb{Z}$, statt mit $k = 0, \dots, n-1$ rechnen, da $\zeta_k = \zeta_{k+n}$ gilt.

2. Es gilt:
$$\frac{1}{42}(v_4 - 17v_3) = e_3 \tag{1}$$
und $v_3 = e_2$. Wir bestimmen
$$v_1 - 2e_2 - 3e_3 = e_1 \tag{2}$$
also sind die drei Standardbasisvektoren in $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ enthalten. Diese drei Vektoren spannen den $\mathbb{R}^3$ auf und alle Vektoren v_i liegen in $\mathbb{R}^3$, also gilt $< v_1, v_2, v_3, v_4 >= \mathbb{R}^3$.

3. Die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 spannen den Vektorraum $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ auf und sind offenbar linear unabhängig, also sind sie auch eine Basis.

Aufgabe 5 (1 + 3 + 2 Punkte)
Es seien
$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
gegeben.

1. Zeige, dass w_1, w_2, w_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.
2. Bestimme die beiden Basiswechselmatrizen zwischen der Standardbasis e_1, e_2, e_3 und w_1, w_2, w_3.
3. Sei
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + 3x_3, x_2 + x_3, 7x_1) \end{aligned}$$
gegeben. Bestimme die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basen (w_1, w_2, w_3) nach (e_1, e_2, e_3).

Lösung:

1. w_1, w_2, w_3 sind drei Vektoren in einem dreidimensionalen Vektorraum. Um zu zeigen, dass sie eine Basis bilden reicht es also bereits zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind, oder dass sie $\mathbb{R}^3$ aufspannen. Wir prüfen die lineare Unabhängigkeit und stellen die Gleichung
$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$
auf. Aus der ersten Zeile erhalten wir $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und aus der dritten Zeile erhalten wir $3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$, also gilt
$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_3 = -\frac{3}{2}\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 \tag{4}$$
Wir setzen diese beiden Bedingungen in die zweite Zeile ein und erhalten
$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 - 2\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 \tag{5}$$
also gilt $\lambda_1 = 0$ und damit auch $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und die Vektoren sind linear unabhängig.

2. Die Basiswechselmatrix von w_1, w_2, w_3 nach e_1, e_2, e_3 erhalten wir, indem wir die drei Vektoren nebeneinander schreiben: (Wir bezeichnen die Basis w_1, w_2, w_3 als W und die Standardbasis als E)

$$T_{E,W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $T_{W,E} = T_{E,W}^{-1}$, also invertieren wir die Matrix einfach. Dazu verwenden wir den Gauß-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II-I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III-3II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II+III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I-II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

die Lösung steht nun auf der rechten Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix, also gilt

$$T_{W,E} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Aus der Aufgabenstellung lesen wir ab, dass für die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis gilt:

$$M_{E,E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Darstellungsmatrix für die gleiche Abbildung, aber bezüglich der Basen W nach E zu bestimmen, berechnen wir

$$M_{E,W}(f) = M_{E,E}(f)T_{E,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Untenstehend sind 10 mathematische Aussagen. Kreuze an, ob diese wahr oder falsch sind (Eine

Aussage ist wahr, wenn sie immer gilt. Eine Aussage ist falsch, wenn es mindestens ein Gegenbeispiel gibt.), die Antworten müssen nicht begründet werden.
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt.

		Wahr	Falsch
(i)	Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums ist linear unabhängig.	◯	◯
(ii)	Ist X eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums, so ist jede Teilmenge von X wieder linear unabhängig.	◯	◯
(iii)	Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V)$, so ist $U = V$.	◯	◯
(iv)	Die Vektoren $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)$ bilde eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$.	◯	◯
(v)	Es gibt einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der genau zwei Vektoren enthält.	◯	◯
(vi)	Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen zwischen nichtleeren Mengen, und ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.	◯	◯
(vii)	Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen zwischen nichtleeren Mengen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.	◯	◯
(viii)	Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen, und ist $U \subseteq X$, so ist $f^{-1}(f(U)) = U$.	◯	◯
(ix)	Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen, und ist $V \subseteq Y$, so ist $f(f^{-1}(V)) = V$.	◯	◯
(x)	Es gibt mindestens einen $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	◯	◯

Lösung:
Die Kommentare sind nicht nötig um die Aufgabe zu lösen, sondern dienen nur dem besseren Verständnis.

(i) Falsch. Wenn z.B. zu einer Basis weitere Vektoren hinzugefügt werden, dann bilden die neuen Vektoren immer noch ein Erzeugendensystem, sind aber nicht mehr linear unabhängig.

(ii) Wahr. Hätte die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann hätte natürlich auch $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ für $n > k$ eine nichttriviale Lösung.

(iii) Wahr. Sei $\dim(V) = n$ und sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von U. Dann hat diese $\dim(V)$ Elemente, die alle in V liegen, ist also eine maximal linear unabhängige Menge in V, da $\dim(V) < \infty$. Damit ist sie auch eine Basis von V. Da beide Vektorräume die gleiche Basis haben, sind sie gleich.

(iv) Wahr. Die Vektoren sind linear unabhängig. Da es drei Vektoren sind, müssen sie auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(v) Falsch. Ein Untervektorraum ist ein Vektorraum, also ist er abgeschlossen unter Multiplikationen. Da unser Vektorraum zwei Vektoren enthalten soll, muss er einen Vektor $v \neq 0$ enthalten. Damit enthält er aber auch die Vektoren λv für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(vi) Falsch. Im Allgemeinen muss das nicht gelten, es könnte z.B. $X = Z = \{1\}$ und $Y = \{1,2\}$ mit den Abbildungen $f, g = (x \mapsto 1)$ gewählt werden. Dann ist $g \circ f$ surjektiv, aber f nicht.

(vii) Wahr. Siehe Tutoriumsblatt 2, Aufgabe 2.

(viii) Falsch. Es können Elemente die nicht in U liegen durch f auf $f(U)$ abgebildet werden. Wähle beispielsweise $X, Y = \mathbb{R}$ und die Abbildung $f(x) = 1$ mit $U = \{1\}$, dann ist $f^{-1}[f(U)] = \mathbb{R}$.

(ix) Falsch. Beispielsweise $f : \{1\} \to \mathbb{R}$ und $V = \{1, 2\}$ mit $f(1) = 1$. Dann gilt $f(f^{-1}[V]) = \{1\} \neq V$.

(x) Falsch. Siehe Tutoriumsblatt 6, Aufgabe 4.