TL;DR (Abzählbarkeit und Äquivalenzrelationen)

Anton Zakrewski

November 5, 2024

1 Abzählbarkeit

- Eine Menge X ist abzählbar, falls $X = \emptyset$ oder eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ existiert.
- Eine Menge X heißt überabzählbar, falls sie nicht abzählbar ist.

1.1 wichtige Fälle abzählbarer Mengen

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- beliebige Teilmengen abzählbarer Mengen
- abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen, d.h. für abzählbare $X_n, n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ abzählbar
- endliche Produkte abzählbarer Mengen, d.h. $\prod_{i=1}^{n} X_i$

1.2 wichtige Fälle überabzählbarer Mengen

- die reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- überabzählbare Vereinigungen, z.B. $\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{r\} = \mathbb{R}$
- Potenzmengen unendlicher Mengen, z.B. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- unendliche Produkte, z.B. schon $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\}$

2 Äquivalenzrelationen

- Gegeben eine Menge X, so ist eine Relation $\sim$ oder $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation gdw.
  1. $\sim$ ist reflexiv, d.h. $x \sim x$ für $x \in X$
  2. $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
  3. $\sim$ ist transitiv, d.h. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$
- wichtigstes Beispiel einer Äquivalenzrelation: $=$
- Die Äquivalenzklasse eines Repräsentanten $x \in X$ ist definiert als

$$[x] \coloneqq \{y \in X | x \sim y\}$$

- für $x, y \in x$ gilt entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$
- X ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$
- eine Abbildung $f : X \to Y$ induziert eine Äquivalenzrelation, nämlich

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

- Eine Menge X und Äquivalenzrelation $\sim$ induziert eine surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_\sim : X &\twoheadrightarrow X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

- Für eine Menge X, Äquivalenzrelationen $\sim_i$ für $i \in I$ ist der Schnitt $\bigcap_{i \in I} \sim_i =: \sim$ definiert durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \forall i \in I : x_i \sim y_i \tag{1}$$

  eine Äquivalenzrelation
- Für eine Menge X ist die triviale Relation $X \times X$, welche für beliebige $x, y \in X$ besagt, dass $x \sim y$ gilt, eine Äquivalenzrelation

- Für eine beliebige Teilmenge $R \subseteq X \times X$ existiert eine eindeutige, kleinste Äquivalenzrelation, welche R enthält, nämlich die erzeugte Äquivalenzrelation: Man betrachte alle Äquivalenzrelationen $S_i \subseteq X \times X$ welche R enthalten, d.h. $R \subseteq S_i$ und nehme den Schnitt

  $$\bigcap_{i \in I} S_i \tag{2}$$

  Der Schnitt ist nichtleer (schließlich enthält die triviale Relation R und ist eine Äquivlanzrelation) und für jede Äquivalenzrelation S_i welche R enthält, gilt

  $$\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq S_i \tag{3}$$