

Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 10

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Sei \mathbb{K} ein Körper. Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$$

1. Bestimme AB und BA .
2. Angenommen $ad - bc \neq 0$. Finde eine Matrix $C \in M_2(\mathbb{K})$ sodass $AC = CA = \mathbf{1}_2$.
3. Angenommen $ad - bc = 0$. Zeige, dass A nicht invertierbar ist.

Lösung:

Zur Erinnerung: Sei \mathbb{K} ein Körper. Dann ist $M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Menge der Matrizen mit m Zeilen und n Spalten.

Da die erste Rechnung eine Aufgabe zur Matrizenmultiplikation ist, definieren wir

Sei \mathbb{K} ein Körper und seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \in M_{n,k}(\mathbb{K})$. Die Einträge von A und B nennen wir $\alpha_{i,j}$ und $\beta_{j,l}$, wobei $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist das Produkt AB eine Matrix $C \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ mit Einträgen $\gamma_{i,k}$.^a Für diese gilt:

$$\gamma_{i,k} = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \beta_{j,k}$$

^aWer mit den Indizes einer Matrix genauso gern durcheinanderkommt, dem hilft vielleicht die gleiche (etwas merkwürdige und deswegen einprägsame) Merkregel wie mir: Stellt euch vor ihr seid in einem Hotel und wollt zu eurem Zimmer. Dann geht man erst die Treppe nach oben, bis man auf dem richtigen Stockwerk ist und dann geht man dort auf dem Flur entlang, bis man an der richtigen Tür steht. Genauso machen wir es auch in einer Matrix: Hierbei entsprechen die Zeilen den einzelnen Stockwerken des Hotels und die Einträge jeder Zeile entsprechen den Türen des Hotels. Also: An erster Stelle von $\alpha_{i,k}$ steht das Stockwerk auf dem man sich befindet, an zweiter Stelle steht die Zimmernummer auf diesem Stockwerk - das heißt der erste Index bestimmt die Zeile in der man sich befindet, der zweite in welcher Spalte.

Dies ist eine etwas abstrakte Definition, für die Berechnung werden wir das ganze anders aufschreiben. Wir beachten jedoch folgendes: Prinzipiell müssen die Matrizen über dem gleichen Körper sein, ansonsten ist die Multiplikation zwischen Elementen nicht definiert. Dann müssen die Dimensionen der Matrizen zusammenpassen. Die erste Matrix muss genauso viele Spalten haben, wie die zweite Matrix Zeilen hat. Eine Multiplikation zwischen Matrizen bei denen diese beiden Zahlen nicht zusammenpassen ist nicht möglich. Streichen wir die beiden Zahlen weg, so bleiben die Dimensionen der neuen Matrix über.

Betrachten wir die Multiplikation genauer, dann sehen wir auch sofort, wieso das gelten muss. Der Term

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \beta_{j,k}$$

entspricht genau dem Skalarprodukt zwischen einem Vektor $(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n})$ und einem Vektor $(\beta_{1,k}, \beta_{2,k}, \dots, \beta_{n,k})$. Das heißt der Eintrag an Stelle (i, k) ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile der ersten Matrix mit der j -ten Spalte der zweiten Matrix. Bezeichnen wir die Zeilen von A mit a_1, \dots, a_m und die Spalten von B mit b_1, \dots, b_k , dann gilt also

$$AB = \begin{pmatrix} \dots & a_1 & \dots \\ \dots & a_2 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & a_m & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \dots & \langle a_1, b_k \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2, b_2 \rangle & \dots & \langle a_2, b_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m, b_1 \rangle & \langle a_m, b_2 \rangle & \dots & \langle a_m, b_k \rangle \end{pmatrix}$$

Wenn man von Hand Matrizen berechnen will, dann kann man also beispielsweise die erste Zeile von A mit jeder Spalte von B multiplizieren und das Ergebnis immer an die nächste Stelle schreiben, dann fährt man mit der zweiten Zeile fort, etc. Um sich das ganze zu vereinfachen kann man auch folgende Schreibweise verwenden:

$$\begin{array}{c} B \\ A \quad AB \end{array}$$

Will man dann einen Eintrag von AB berechnen, kann man eine gedachte Linie nach links ziehen und erhält die Zeile und eine weitere Linie nach oben und erhält die Spalte, die man für das Skalarprodukt braucht. Wir können das ganze an einem kleinen Beispiel einmal rechnen. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,2} + \alpha_{2,2}\beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

wenn man hier auf die Indizes sieht, dann erkennt man sofort ein schönes Muster und obige Formel ist nicht mehr so gruslig. Das ganze könnte man sich jetzt natürlich auch noch für größere Matrizen aufschreiben, aber das werden Unmengen Terme.

Einen besondere Stellenwert haben hierbei quadratische Matrizen. Hierbei schreiben wir üblicherweise $M_n(\mathbb{K})$ statt $M_{n,n}(\mathbb{K})$ wenn wir eine Matrix mit n Zeilen und Spalten meinen. Matrizen bieten folgende schöne Option:

Sei \mathbb{K} ein Körper. Dann definieren wir die *Einheitsmatrix* als die Matrix die 1 auf der Hauptdiagonale stehen hat und 0 überall sonst. Wir schreiben also

$$\mathbb{1}_n := E_n := \text{diag}(1, \dots, 1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist deswegen schön, weil sie das neutrale Element der Multiplikation ist. Es gilt nämlich für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$, dass $E_n A = A E_n = A$. Das kann man gerne nachrechnen, schon um die Matrixmultiplikation zu üben. Wenn es ein neutrales Element gibt, dann ist die Frage, ob es auch inverse Elemente gibt. Wir sagen also

Sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir nennen A *invertierbar*, wenn es eine Matrix B gibt, sodass $AB = \mathbf{1}_n$ gilt. In diesem Fall nennen wir B die *inverse Matrix* zu A und schreiben sie als A^{-1} .

Wir werden sehen, dass nicht alle Matrizen invertierbar sind. Unabhängig davon gilt aber auf jeden Fall, dass die quadratischen Matrizen einer bestimmten Größe n mit der Matrixaddition und Matrixmultiplikation einen Ring bilden.¹

Da wir nun einige Definitionsarbeit geleistet haben, wollen wir die Aufgabe selbst lösen:

- Wir wollen die beiden Matrizen multiplizieren - mithilfe der obigen Formeln finden wir

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)\mathbf{1}_2$$

und umgekehrt

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc)\mathbf{1}_2$$

die Matrizen kommutieren also miteinander und ergeben ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

- Angenommen es gilt $ad - bc \neq 0$. Dann können wir eine gesuchte Matrix C einfach finden indem wir das Ergebnis der ersten Teilaufgabe verwenden. Da unser Ergebnis das $(ad - bc)$ -fache der Einheitsmatrix ist, können wir B durch diesen Term teilen und erhalten für $C = (ad - bc)^{-1}B$, dass $AC = \mathbf{1}_2$. Das C löst also unsere Aufgabe und wir können sehen, dass es gleichzeitig das Inverse zu A ist.
- Angenommen es gilt $ad - bc = 0$. Dann gilt laut der ersten Teilaufgabe auch $AB = BA = 0$. Nun nehmen wir an, dass A invertierbar ist sodass $AA^{-1} = \mathbf{1}_2$ gilt. Dann:

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = 0$$

Wenn B die Nullmatrix ist, dann muss aber auch $a, b, c, d = 0$ gelten und damit $A = 0$. Da aber für alle Matrizen $D \in M_2(\mathbb{K})$ gilt, dass $0D = 0$, kann A nicht invertierbar sein, da auch $AA^{-1} = 0 \neq \mathbf{1}_2$ gelten würde. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, also ist A nicht invertierbar.

In den nächsten Wochen werden wir Determinanten besprechen und zeigen, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante nicht Null ist. Die Determinante einer Matrix der Form A ist dabei $ad - bc$, also haben wir diese Aussage hier bereits für 2×2 Matrizen gezeigt.

Aufgabe 2

Löse folgendes Gleichungssystem durch Umformung in Zeilenstufenform mithilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

¹Das ist auch der Grund, wieso quadratische Matrizen praktisch sind. Wir könnten prinzipiell für eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definieren, dass sie invertierbar ist, wenn es eine Matrix $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ gibt, sodass $AB = \mathbf{1}_m$. Aber in diesem Fall sind $A, B, \mathbf{1}_m$ allesamt Elemente unterschiedlicher Mengen und nicht gut kombinierbar, da beispielsweise $A\mathbf{1}_m$ oder $\mathbf{1}_m B$ und BA alle nicht definiert sind.

Lösung:

Lineare Gleichungssysteme sind, sobald sie eine gewisse Größe erreichen, nicht mehr gut “von Hand” zu lösen und wir sollten Matrizen anwenden.² Das beruht auf folgendem:

Angenommen wir haben ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten, also von der Form

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \dots + \alpha_{1,n}x_n = \lambda_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \dots + \alpha_{2,n}x_n = \lambda_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \dots + \alpha_{m,n}x_n = \lambda_m \end{cases} \quad (1)$$

wobei die $\alpha_{i,j}$ und λ_i im konkreten Fall natürlich Elemente aus einem Körper wären. Die x_j sind dagegen unsere Unbekannten. Dann können wir das auch als eine Matrixgleichung der Form $Ax = b$ schreiben, das Gleichungssystem ist also äquivalent dazu, den Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ in folgender Gleichung zu finden

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir das Produkt auf der linken Seite aus, so erhalten wir als Ergebnis einen m -Vektor und jede Zeile entspricht einer der Gleichungen aus dem Gleichungssystem 1. Wir wollen die Schreibweise allerdings noch vereinfachen. Der Vektor x ändert im Verlauf der ganzen Rechnung seine Form nicht, also kann er auch weggelassen werden, genauso wie das Gleichheitszeichen. Wir verwenden stattdessen die Schreibweise einer *Erweiterten Koeffizientenmatrix*, der Form $(A | b)$, also eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} & \lambda_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} & \lambda_m \end{array} \right)$$

Nun überlegen wir uns, dass die Multiplikation einzelner Gleichungen mit einem Skalar, oder die Addition von mehreren Gleichungen das Ergebnis des ganzen Gleichungssystems nicht ändert. Genau die Schritte, die man also beim händischen Lösen eines Gleichungssystems vornehmen würde, können wir dann auch bei der erweiterten Koeffizientenmatrix anwenden. Die Koeffizienten der Matrix A in der j -ten Zeile entsprechen, wie oben erläutert, genau den Koeffizienten der j -ten Gleichung. Das Analogon der m -fachen Addition der j -ten Gleichung zur k -ten Gleichung ist also die m -fache Addition der j -ten Zeile zur k -ten Zeile unseres Gleichungssystems $Ax = b$. Genauso kann man auch Gleichungen in ihrer Reihenfolge vertauschen, ohne dass sich etwas ändert. In der Matrix entspricht das dem Vertauschen zweier Zeilen. Wir nutzen das nun aus um unsere Matrix in eine besonders einfache Form zu bringen, nämlich die Zeilenstufenform:

Sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Sie ist in *Zeilenstufenform*, wenn in jeder Zeile die Anzahl der Unbekannten niedriger ist als in der vorherigen Zeile. Unbekannte die in einer Zeile nicht vorkommen können auch in späteren Zeilen nicht mehr vorkommen.

Wobei wir mit “nicht vorkommen” meinen, dass der jeweilige Koeffizient gleich Null ist. Eine Zeilenstufenform kann erreicht werden indem man alle Spalten durchgeht und dort sukzessive so viele Elemente gleich Null setzt, wie man kann ohne, dass in einer der vorherigen Zeilen eine Variable

²Natürlich sind nichtlineare Gleichungssysteme auch nicht gut von Hand lösbar. Aber hier muss man andere Methoden anwenden als Matrizen.

wieder eingeführt wird. Diese etwas abstrakte Beschreibung wollen wir nun mit der Aufgabenlösung verdeutlichen:

Zuerst schreiben wir das Gleichungssystem in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Um die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen gehen wir nun Spalte für Spalte durch und addieren zu jeder geeigneten Zeile das Vielfache der obersten Zeile, die in der vorherigen Spalte eine Null als Eintrag hat. Es gibt keine nullte Spalte, also fällt diese Bedingung für die erste Spalte weg. In unserem Fall können wir die erste Zeile von der zweiten und dritten Zeile abziehen und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

In der ersten Spalte steht also nur noch an erster Stelle ein nichttrivialer Eintrag. Wir wollen mit der zweiten Spalte fortfahren. Wir können nicht mehr mit der ersten Zeile arbeiten, da wir dann in allen anderen Zeilen wieder einen Eintrag an erster Stelle hätten. Das Problem ergibt sich in der zweiten Zeile nicht. Da der Eintrag an zweiter Stelle eine 3 und an dritter Stelle der zweiten Spalte eine -1 ist, bietet es sich hier an die beiden Zeilen zu tauschen um Brüche zu vermeiden.^a Wir vertauschen also die zweite und dritte Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right)$$

Nun können wir das 3-fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile addieren und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

In der dritten Spalte können wir nun nicht mehr fortfahren, das heißt den Rest müssen wir durch Substitution lösen. Da wir drei Gleichungen für vier Unbekannte haben, ist zu erwarten, dass es eine freie Variable gibt - das heißt wir haben keine eindeutige Lösung, sondern einen eindimensionalen Unterraum von Lösungen, parametrisiert durch eine Variable, beispielsweise λ . Wir setzen $x_4 = \lambda$ und wollen alle anderen Unbekannten durch λ ausdrücken. Wir bestimmen

$$10x_3 + 2\lambda = 10 \Rightarrow x_3 = 1 - \frac{1}{5}\lambda$$

Wir setzen nun unser Ergebnis für x_3 in die zweite Zeile ein und erhalten

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 + 2\lambda &= -x_2 + 3 - \frac{3}{5}\lambda + 2\lambda = 4 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -4 + 3 - \frac{3}{5}\lambda + 2\lambda = -1 + \frac{7}{5}\lambda \end{aligned}$$

und setzen das nun wiederum in die erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 + 3\lambda &= 1 + 2 - \frac{14}{5}\lambda + 1 - \frac{1}{5}\lambda + 3\lambda = 1 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 1 - 1 - 2 + \frac{14}{5}\lambda + \frac{1}{5}\lambda - 3\lambda = -2\end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge für das lineare Gleichungssystem:

$$\mathcal{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

^aEs gibt keinen mathematischen Grund an dieser Stelle die Zeilen zu vertauschen, da sich dadurch, wie gesagt, am Gleichungssystem selbst nichts ändert. Meiner Erfahrung nach ist das Hauptproblem beim lösen von solchen Gleichungssystemen aber, dass man sich verrechnet. Je einfacher man also die Zahlen hält, desto weniger verrechnet man sich und desto korrekter wird die Aufgabe. Ich hab mich sicherlich nicht mehrmals verrechnet!

In obiger Aufgabe haben wir natürlich sehr viel mehr geschrieben als man normalerweise schreiben sollte. Normalerweise schreibt man nur die Matrizen und die Transformationen auf.³ In kürzerer Schreibweise könnte man die Aufgabe auch so lösen (wobei wir streng genommen nicht mehr den Gauß-Algorithmus, sondern den Gauß-Jordan-Algorithmus verwenden) indem wir danach noch von jeder Zeile untere Zeilen abziehen um mehr Nulleinträge zu erhalten.

³Die von mir empfohlene Schreibweise ist hierbei ein Pfeil \rightarrow und darüber/darunter die Transformationen. Ein Folgepfeil \Rightarrow ist falsch, da es hier nicht um die logische Verknüpfung von Aussagen geht. Sind die Transformationen voneinander abhängig, beispielsweise für $I + II$ und $II + III$, muss angegeben werden in welcher Reihenfolge die Transformationen ausgeführt werden.

Wir verwenden den Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{\text{II-I} \\ \text{III-I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{III} + 3\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 10 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{\text{II} \cdot (-1) \\ \text{III} \cdot \frac{1}{10}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{\text{I-III} \\ \text{II}+3\text{III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{I}+2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

und können das Ergebnis direkt ablesen. Es gilt, wenn wir $x_4 = \lambda$ setzen:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -2 \\
 x_2 &= \frac{7}{5}\lambda - 1 \\
 x_3 &= -\frac{1}{5}\lambda + 1
 \end{aligned}$$

also ist unser Lösungsraum:

$$\mathcal{L} = \left\{ \lambda \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Wie wir sehen wird unser Beweis durch die andere Schreibweise sehr viel kürzer und angenehmer zu lesen und durch die Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus vereinfacht sich auch das Lösen des Gleichungssystems das man erhält, wenn die Matrix auf Zeilenstufenform gebracht wurde.

Aufgabe 3

Sei \mathbb{K} ein Körper und U, V Vektorräume über \mathbb{K} . Seien $P \leq Q \leq U$ Unterräume und sei $L : U \rightarrow V$ ein Vektorraumhomomorphismus. Zeige, dass $\dim(L(Q)) - \dim(L(P)) \leq \dim(Q) - \dim(P)$ gilt.

Lösung:

Wir werden für diese Aufgabe Sätze über die Dimensionen von Vektorräumen verwenden, siehe

meine Lösung zum achten Tutoriumsblatt. Es gilt:

$$\dim(U/Q) = \dim(U) - \dim(Q)$$

für Quotientenräume und

$$\dim(U) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{ker}(f))$$

für lineare Abbildungen. Mit diesem Wissen können wir die Aufgabe bereits lösen. Wir betrachten zwei verschiedene Beweise:

Da $f : U \rightarrow V$ gilt und P ein Unterraum von Q ist, ist auch $L(P)$ ein Unterraum von $L(Q)$; Beide sind Unterräume von V . L induziert nun eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L^* : Q/P &\rightarrow L(Q)/L(P) \\ x + P &\mapsto L(x) + L(P) \end{aligned}$$

wir wollen prüfen ob diese Abbildung wohldefiniert ist. Für jedes beliebige $x + P$ ist $L^*(x)$ definiert als $L(x) + L(P)$. Da $L(x)$ per Definition in $L(Q)$ liegt macht das Sinn. Seien nun $x, y \in Q$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} L^*(\lambda(x + P) + (y + P)) &= L^*(\lambda x + y + P) \\ &= L(\lambda x + y) + L(P) \\ &= L(\lambda x) + L(y) + L(P) \\ &= \lambda L(x) + L(P) + L(y) + L(P) = \lambda L^*(x + P) + L^*(y + P) \end{aligned}$$

also ist L^* auch ein Homomorphismus. Die Abbildung ist surjektiv, denn für jedes $y + L(P) \in L(Q)/L(P)$ existiert ein $x \in Q$, sodass $L(x) = y$, also gilt auch $L^*(x + P) = y + L(P)$. Da die Abbildung surjektiv ist, muss $\dim(Q/P) \geq \dim(L(Q)/L(P))$ gelten. Wir wenden nun den Satz über Dimensionen von Quotientenräumen an und erhalten

$$\dim(Q/P) \geq \dim(L(Q)/L(P)) \Leftrightarrow \dim(Q) - \dim(P) \geq \dim(L(Q)) - \dim(L(P))$$

was genau das gewünschte Ergebnis ist.

Für den zweiten Beweis verwenden wir den Rangsatz:

Die lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ induziert zwei weitere lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} L|_Q &\rightarrow L(Q) \\ x &\mapsto L(x) \end{aligned}$$

und analog für P . Es ist hier wichtig zu beachten, dass nicht nur die Bilder, sondern auch die Kerne möglicherweise unterschiedlich sind. Denn gilt $x \in \text{ker}(L) \setminus Q$, dann ist natürlich $x \notin \text{ker}(L|_Q) \subseteq Q$. Wir nutzen diesen Fakt für unseren Beweis, denn es gilt

$$x \in \text{ker}(L|_P) \Leftrightarrow L|_P(x) = 0 \Rightarrow L|_Q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{ker}(L|_Q)$$

wobei wegen obigen Arguments auch gilt, dass möglicherweise $\text{ker}(L|_Q) \not\subseteq \text{ker}(L|_P)$ gilt. Da wir also nur eine einseitige Inklusion haben, der Kern von $L|_Q$ also größer sein kann als der Kern von

$L|_P$, gilt auch

$$\dim(\ker(L|_P)) \leq \dim(\ker(L|_Q)) \quad (2)$$

was wir nun verwenden können um unsere Aussage zu zeigen. Es gilt mit dem Rangsatz jeweils für die beiden Abbildungen $L|_Q$ und $L|_P$, dass

$$\dim(Q) = \dim(\operatorname{im}(L|_Q)) + \dim(\ker(L|_Q))$$

$$\dim(P) = \dim(\operatorname{im}(L|_P)) + \dim(\ker(L|_P))$$

Wir ziehen nun die zweite von der ersten Gleichung ab und erhalten

$$\dim(Q) - \dim(P) = \dim(\operatorname{im}(L|_Q)) + \dim(\ker(L|_Q)) - \dim(\operatorname{im}(L|_P)) - \dim(\ker(L|_P))$$

Es gilt für die Kerne $\dim(\ker(L|_Q)) - \dim(\ker(L|_P)) \geq 0$, wegen Ungleichung 2. Das heißt aber auch, dass

$$\dim(\operatorname{im}(L|_Q)) + \dim(\ker(L|_Q)) - \dim(\operatorname{im}(L|_P)) - \dim(\ker(L|_P)) \geq \dim(\operatorname{im}(L|_Q)) - \dim(\operatorname{im}(L|_P))$$

Wir überlegen uns nun noch, dass natürlich $\operatorname{im}(L|_Q) = L(Q)$ und $\operatorname{im}(L|_P) = L(P)$ gilt, der rechte Term der letzten Ungleichung also $L(Q) - L(P)$ ist. Wenn wir die letzten beiden (Un-)Gleichungen nun zusammenfügen erhalten wir genau

$$\dim(Q) - \dim(P) \geq \dim(L(Q)) - \dim(L(P))$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4

Sei \mathbb{K} ein Körper. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix mit Rang r . Zeige, dass es Matrizen $B \in M_{m,r}(\mathbb{K})$ und $C \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ gibt, sodass $A = BC$.

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definition des Rangs einer linearen Abbildung

Sei \mathbb{K} ein Körper und U, V Vektorräume über \mathbb{K} . Sei $f : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist der *Rang* von f definiert als

$$\operatorname{rk}(f) = \dim(\operatorname{im}(f))$$

also die Dimension des Bildes.

Da es zu einer linearen Abbildung f auch eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $m = \dim(V)$, $n = \dim(U)$ gibt, können wir das Konzept natürlich ohne weiteres übertragen und den Rang einer Matrix als die Dimension des Bildes der Matrix definieren. Es gibt aber auch folgende Definition

Sei \mathbb{K} ein Körper und sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, dann ist der *Rang* von A die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A .

Teilweise auch mit Zeilen statt Spalten. Es zeigt sich jedoch, dass diese beiden Definitionen äquivalent sind. Dazu überlegen wir uns folgendes: Wir wissen, dass die Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren sind. Ist also u_1, \dots, u_n eine Basis von U , sowie v_1, \dots, v_m eine Basis von V und ist A eine Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basen, dann gilt

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

wobei die Vektoren Au_j dann jeweils in der Basis v_1, \dots, v_m dargestellt werden. Die Dimension eines Vektorraums ist unabhängig von der Darstellung in einer Basis, das gilt natürlich auch für das Bild einer Abbildung. Da die Vektoren Au_1, \dots, Au_n offensichtlich ein Erzeugendensystem des Bilds sind, ist die Dimension einer Basis die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Das heißt wenn wir die zweite Definition des Rangs verwenden und die Anzahl der linear unabhängigen Spalten einer Matrix zählen, erhalten wir die Dimension des Bildes der Matrix, also die erste Definition des Rangs - und umgekehrt. Somit sehen wir (das ist wie üblich kein Beweis, sondern ein Versuch das ganze intuitiv darzustellen), dass die beiden Definitionen von Rang übereinstimmen. Wir erinnern uns auch an die Formel

$$M_{C^*, B^*}(f) = T_{C^*, C} M_{C, B}(f) T_{B, B^*}$$

die die Darstellung einer linearen Abbildung bezüglich der Basen C^* und B^* durch Basiswechselformen und die Darstellungsmatrix bezüglich Basen C, B ausdrückt. Mit diesem Wissen können wir die Aufgabe lösen:

Unsere Matrix ist $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Wir bezeichnen nun mit B_n die Standardbasis von \mathbb{K}^n und mit B_m die Standardbasis von \mathbb{K}^m .

Da A den Rang r hat, wissen wir, dass $\text{im}(A)$ die Dimension r hat, also gibt es eine Basis v_1, \dots, v_r von $\text{im}(A)$, die wir C nennen. Da $\text{im}(A) \subseteq \mathbb{K}^m$ gilt, können wir Vektoren u_1, \dots, u_k finden (mit $k = m - r$), sodass $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k$ eine Basis von \mathbb{K}^m ist. Wir nennen diese Basis C' . Dann gibt es eine Transformationsmatrix von B_m nach C , geschrieben T_{C, B_m} . Die Matrix A induziert eine weitere Matrix $A' \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ die Elemente aus \mathbb{K}^n auf Elemente in $\text{im}(A)$ abbildet, wobei wir letzteren Raum als einen Untervektorraum von \mathbb{K}^m verstehen können, beispielsweise per Einbettung. Die Einbettung können wir dabei durch eine Matrix $I \in M_{r,m}(\mathbb{K})$ beschreiben. Es handelt sich dabei um eine "abgeschnittene" Einheitsmatrix. Um das ganze übersichtlicher zu gestalten wollen wir die Basen der Matrizen mit aufschreiben.

$$A_{B_m, B_n} = T_{B_m, C'} A_{C', B_n} = T_{B_m, C'} I_{C', C} A_{C, B_n}$$

wir stoßen hierbei auf keine Probleme, da wir die Basis C' so angeordnet haben, dass die Vektoren aus C die ersten r Vektoren bilden. Wir betrachten nun welche Dimensionen unsere Matrizen haben. A_{C, B_n} ist eine Matrix die einen n -Vektor auf einen r -Vektor abbildet, also eine $r \times n$ Matrix. $T_{B_m, C'}$ ist eine Basiswechselformen in \mathbb{K}^m , also eine quadratische $m \times m$ Matrix. I ist eine Einbettung von einem r -dimensionalen in einen m -dimensionalen Vektorraum, also eine $m \times r$ Matrix. Das Produkt $T_{B_m, C'} I_{C', C}$ ist also eine $m \times r$ Matrix.

Damit haben wir mit $T_{B_m, C'} I_{C', C} \in M_{m,r}(\mathbb{K})$ und $A_{C, B_n} \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ die zwei gesuchten Matrizen gefunden.