

Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 11

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen über \mathbb{C} :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$, wobei $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Lösung:

Wir fassen unser Wissen über Determinanten zusammen:

Sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix deren Einträge wir mit $a_{j,k}$ bezeichnen. Dann definieren wir die *Determinante von A* via *Leibniz-Formel* als

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}$$

Die Determinante ist eine Kenngröße einer Matrix, die sie auf eine gewisse Art und Weise charakterisiert. Anschaulich kann man die Determinant als ein n -Volumen verstehen das von den n Vektoren aufgespannt wird, die in den Zeilen, bzw. Spalten von A stehen. n Vektoren spannen genau dann ein n -Volumen ungleich Null auf, wenn sie den Raum erzeugen. Das bedeutet wir können für eine

Matrix erwarten, dass ihre Determinante genau dann Null ist, wenn die Spaltenvektoren keine Basis des \mathbb{K}^n bilden. Dazu aber auf Blatt 12 mehr.

Prinzipiell ist die Determinante die Summe aller möglichen Produkte, die Elemente aus A wählen, sodass in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag in das Produkt mit einfließt. Etwas ausführlicher: Wir konstruieren einen der Summanden der Determinante indem wir uns eine Kombination von genau n Einträgen in A nehmen, sodass in keiner Zeile oder Spalte zwei Einträge gewählt werden. Dazu könnte man beispielsweise einen beliebigen Eintrag aus der ersten Zeile wählen, dann einen Eintrag aus der zweiten Zeile, der aber in einer anderen Spalte liegen muss, etc. Wenn wir also jeder der Zahlen 1 bis n (wir wählen pro Zeile einen Eintrag und es gibt n Zeilen) jeweils eine Zahl in $\{1, \dots, n\}$ zuordnen, sodass keine der Zahlen doppelt vergeben wird (das entspricht der Zuordnung der Spalten, die man ja nummerieren kann), dann können wir das als Permutation σ verstehen.

Daher kommt der Eintrag $a_{j,\sigma(j)}$. Das Produkt dieser Einträge ist nun also ein Summand. Wir überlegen uns noch, dass wir die Einträge je nach Vorzeichen der Permutation mit unterschiedlichem Vorzeichen versehen wollen, da wir dadurch erreichen, dass die Determinante Null ist, wenn zwei Zeilen oder Spalten gleich sind, und summieren über alle Permutationen auf. Es gibt $n!$ Vertauschungen auf n Elementen, also erwarten wir auch ebenso viele Terme in unserer Summe.

Die Leibnizformel ist für Berechnungen eher ungeeignet, ein Hantieren mit $n!$ Termen dieser Form ist fehleranfällig. Deswegen gibt es folgende einfachere Methoden eine Determinante zu bestimmen. Für 2×2 -Matrizen ist es besonders einfach:

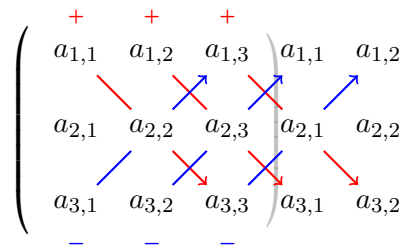
<p>Sei</p> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ <p>eine Matrix. Dann ist die Determinante gegeben als</p> $\det(A) = ad - bc$

In diesem Fall hat die Determinante nur zwei Terme. Der erste Term ad entspricht der trivialen Permutation, also der Identität. Wir wählen die Einträge $a_{1,1}$ und $a_{2,2}$. Die Identität hat positives Vorzeichen. Der zweite Term bc entspricht der einzigen anderen Permutation in S_2 , nämlich der Transposition (12). Diese hat negatives Vorzeichen und wir erhalten die Einträge $a_{1,2}$ und $a_{2,1}$. Für 3×3 -Matrizen gibt es immer noch eine einfache Formel:

<p>Sei</p> $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ <p>eine Matrix. Die <i>Formel von Sarrus</i> liefert uns die Determinante:</p> $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$

Man kann sich wie eben überlegen wo diese Terme herkommen indem man sich die $3! = 6$ Elemente von S_3 aufschreibt und für jede dieser Permutationen den zugehörigen Summanden bestimmt. Man landet genau bei der eben beschriebenen Formel. Es gibt hierbei eine hilfreiche Merkmregel. Dafür schreibt man die ersten beiden Spalten der Matrix noch einmal hinter die Matrix und malt sich alle Diagonalen ein. Wie in dieser Grafik dargestellt multipliziert man die Einträge entlang der Linien miteinander. Dabei werden die Linien von oben links nach unten rechts mit positivem und die Linien von unten links nach oben rechts mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Für größere Matrizen gibt es keine so anschaulichen Regeln mehr. Hier kann man die Determinante am besten mit dem Gauß-Algorithmus oder mit der Laplace-Entwicklung finden.



Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir bezeichnen mit $A_{j,k} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ die Matrix deren j -te Zeile und k -te Spalte gestrichen wurde. Die *Laplace-Entwicklung nach der j -ten Zeile* lautet dann

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{j,k} \det(A_{j,k})$$

bzw. die *Laplace-Entwicklung nach der k -ten Spalte* ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{j,k} \det(A_{j,k})$$

Wir berechnen die Determinante einer $n \times n$ -Matrix in diesem Fall also dadurch, dass wir n Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen bestimmen. Bei diesen $(n-1) \times (n-1)$ -Determinanten können wir jeweils wieder jede der beschriebenen Methoden anwenden um sie zu berechnen. Angenommen wir führen die Laplace-Entwicklung erneut durch, dann hätten wir als nächstes natürlich $n(n-1)$ Determinanten von $(n-2) \times (n-2)$ Matrizen. Man kann auf diese Art und Weise also jede Determinante auf 3×3 -Matrizen zurückführen und dann die Regel von Sarrus anwenden. Gleichzeitig kann man die Regel von Sarrus auch aus der Laplace-Entwicklung folgern. Das zu zeigen ist eine gute Übung!

Wir überlegen uns das Verfahren kurz an folgendem Fall: Betrachte die Matrix A mit Einträgen $a_{j,k}$ deren Determinante wir bestimmen indem wir nach der ersten Zeile entwickeln:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots \\ \vdots & A_{1,1} \end{pmatrix}$$

Wenn wir alle $n!$ Permutationen betrachten, dann gibt es unter diesen genau $(n-1)!$ Permutationen die 1 auf 1 abbilden. Diese Permutationen vertauschen dann sämtliche anderen Elemente von $\{2, \dots, n\}$ - also genau die Elemente von $A_{1,1}$, denn jede Permutation wählt Elemente so, dass in jeder Zeile und Spalte nur ein Element zu diesem Summanden der Determinante beiträgt. Der erste Koeffizient ist $a_{1,1}$, also können wir nur Einträge wählen, die weder in der ersten Zeile, noch in der ersten Spalte liegen. Für weitere Einträge funktioniert das ganze analog. Wir werden in der zweiten Aufgabe eine praktische Anwendung sehen.

Da jede der n Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen mit einem Vorfaktor $a_{j,k}$ versehen ist, wobei entweder j oder k konstant bleibt, ist es hier meistens am schnellsten, wenn man nach der Zeile oder Spalte entwickelt in der die meisten Einträge 0 sind.

Eine zweite Methode um die Determinante beliebig großer Matrizen zu bestimmen ist mithilfe des Gaußalgorithmus. Dabei bringen wir die Matrix nach Möglichkeit in eine obere Dreiecksform, da die Determinante dann einfach das Produkt der Diagonalelemente ist. Allerdings muss man bei den Zeilenumformungen aufpassen, da diese teilweise die Determinante verändern können. Wir fassen diese Regeln und einige allgemeine Rechenregeln zur Determinante hier zusammen:

Sei \mathbb{K} ein Körper und $A, B, D \in M_n(\mathbb{K})$ für $n \geq 1$. Es gilt:

1. Transposition lässt die Determinante unverändert.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

2. Die Determinante ist multiplikativ:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

3. Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge. Es gilt also

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} d_{1,1} & * & * & \dots & * \\ 0 & d_{2,2} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & d_{3,3} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^n a_{j,j}$$

insbesondere ist die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix die eine 0 auf der Diagonalen hat gleich 0.

4. Die Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile verändert die Determinante nicht. Sind A_1, \dots, A_n die Zeilen von A und gilt

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j + A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq j$, dann gilt

$$\det(A) = \det(A')$$

5. Vertauschen zweier Zeilen verändert das Vorzeichen der Determinante. Sind A_1, \dots, A_n die Zeilen von A und gilt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

wobei $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dann ist

$$\det(A) = -\det(A')$$

6. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ multipliziert die Determinante mit λ . Sind also A_1, \dots, A_n die Zeilen von A und gilt

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\det(A') = \lambda \det(A)$$

Daraus folgt direkt auch

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Die Determinante der inversen Matrix ist das inverse der Determinante. Sei also A invertierbar, dann gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Wir sehen also, dass wir zur Bestimmung der Determinante mithilfe des Gauß-Algorithmus in erster Linie beachten müssen, dass die Multiplikation einer Zeile und die Vertauschung von Zeilen die Determinante ändert. Addition von Zeilen aber nicht.

Nun können wir die Aufgaben angehen.

1. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

können wir die Regel für 2×2 Matrizen anwenden. Es gilt also

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$$

2. Für

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

können wir die Regel für 2×2 Matrizen anwenden. Es gilt also

$$\det(R_\alpha) = \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

wobei wir die allgemeine trigonometrische Beziehung $\forall \phi \in \mathbb{R} : \sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2 = 1$ verwendet haben. Matrizen dieser Form nennen wir Rotationsmatrizen. Lassen wir diese Matrix auf einen Vektor wirken, so wird er um den Winkel α gedreht.

3. Für

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

wenden wir erneut die Regel für 2×2 Matrizen an. Es gilt mithilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, dass

$$\det(B) = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 1 - 2 - (4 - 5) = 0$$

Wir haben hier also eine deren Zeilen nicht linear unabhängig sind.

4. Für

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die Regel von Sarrus. Es gilt also

$$\det(C) = 0 + (-1) + 1 - 0 - (-1) - 0 = 1$$

5. Für^a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die Regel von Sarrus. Es gilt also, erneut mit der binomischen Formel:

$$\det(D) = 1 + 0 + 0 - \underbrace{(1-i)(1+i)}_{1-i^2} - (-i^2) = -2$$

6. Für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

verwenden wir die Regel von Sarrus. Es gilt also

$$\det(M) = \omega^2 + \omega^2 + \omega^2 - \omega - \omega^4 - \omega = -\omega^4 + 3\omega^2 - 2\omega$$

Es gilt außerdem

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

also können wir bestimmen, dass

$$\omega^4 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

sowie

$$\omega^2 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Setzen wir das in obigen Term ein erhalten wir

$$\det(M) = 3 \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)$$

Wir entwickeln diese Terme erneut mithilfe der Formel $e^{ik} = \cos(k) + i \sin(k)$ und beachten, dass der Cosinus symmetrisch ist, also gilt $\cos(2\pi/3) = \cos(-2\pi/3)$, da die beiden Terme

unterschiedliche Vorzeichen haben, heben sie sich gegenseitig auf. Wir verwenden dann noch, dass Sinus im Gegensatz dazu antisymmetrisch ist, also gilt $\sin(2\pi/3) = -\sin(2\pi/3)$. Da die beiden Terme unterschiedliche Vorzeichen haben, addieren sie sich also auf. Wir erhalten:

$$\det(M) = 3 \left(-2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = -3i\sqrt{3}$$

denn $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$

^aAuf dem Tutoriumsblatt der Vorlesungswebsite steht eine andere Matrix. Ich weiß nicht ob das Absicht ist oder nicht, aber die Matrix hier fand ich wesentlich spannender. Sie ist außerdem hermitesch, das heißt dass $A = A^*$ gilt, wobei A^* die Matrix ist, die man erhält, wenn A transponiert und danach jeder Eintrag komplex konjugiert wird.

Eine Bemerkung zur letzten Lösung und dem Wert von $\sin(2\pi/3)$: Ich denke in einer Klausursituation ist es ausreichend, wenn man die acht wichtigsten Terme weiß, also

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1, \cos(\pi/2) = 0, \cos(\pi) = -1, \cos(3\pi/2) = 0 \\ \sin(0) &= 0, \sin(\pi/2) = 1, \sin(\pi) = 0, \sin(3\pi/2) = -1 \end{aligned}$$

und dazu noch, dass der Cosinus symmetrisch und der Sinus antisymmetrisch ist. Man kann hiermit natürlich alle Terme der Form $\sin(k\pi/2)$ und $\cos(k\pi/2)$ bestimmen, da Sinus und Cosinus 2π -periodisch sind.

Aufgabe 2

Bestimme mithilfe der Laplace Entwicklung die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

In der Diskussion zur ersten Aufgabe hatten wir die Laplace-Entwicklung bereits ausführlich beschrieben. Wir bestimmen mit ihr die Determinante

Da die letzte Spalte der Matrix A zwei Nulleinträge hat, entwickeln wir die Matrix nach der letzten Spalte. Es ergibt sich also

$$\det(A) = (-1)^5(-2) \det \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^6(-5) \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

die Determinanten der beiden Untermatrizen bestimmen wir mit der Regel von Sarrus:

$$\det(A_{1,4}) = -24 - 6 + 12 + 6 - 24 + 12 = -24$$

und

$$\det(A_{2,4}) = 24 + 10 - 18 - 9 + 24 - 20 = 11$$

damit ergibt sich

$$\det(A) = 2(-24) - 5(11) = -103$$

Aufgabe 3

Finde ein Beispiel einer Untergruppe der Ordnung 6 von S_4 .

Lösung:

Wir erinnern uns an die beiden Begriffe von Ordnung.¹

Sei \mathcal{G} eine Gruppe und sei $g \in \mathcal{G}$. Dann ist die *Ordnung der Gruppe* \mathcal{G} definiert als

$$\text{Ord}(\mathcal{G}) = |\mathcal{G}|$$

und die *Ordnung des Gruppenelements* g ist definiert als

$$\text{Ord}(g) = \inf(\{n \in \mathbb{N}^+ \mid g^n = e_{\mathcal{G}}\})$$

mit der Vereinbarung $\inf(\emptyset) = +\infty$

Die Ordnung einer Gruppe ist also genau die Anzahl der Elemente der Gruppe. Die Ordnung eines Gruppenelements (die wir hier nicht brauchen, aber es ist sicherlich gut, wenn man davon schonmal gehört hat) ist also die kleinste mögliche Zahl n , sodass g^n das neutrale Element ergibt. Gibt es kein solches n , dann sagen wir, dass das Element unendliche Ordnung hat (das wäre beispielsweise für jedes Element $z \neq 0$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der Fall).

Unser Ziel ist es also nun eine Untergruppe von S_4 mit 6 Elementen zu finden. Allgemein ist S_n so definiert:

Sei X eine beliebige Menge. Dann definieren wir die *Symmetrische Gruppe von X* als

$$S_X = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}.$$

Gilt $X = \{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}^+$, dann notieren wir diese Gruppe als S_n .

S_n ist also die Gruppe aller bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst. Anders gesagt: Ein Element von S_n ist eine Abbildung die jedem Element aus $\{1, \dots, n\}$ ein eindeutiges Element aus derselben Menge zuordnet. Anschaulicher ist es vielleicht, wenn man sagt, dass ein Element $\sigma \in S_n$, genannt *Permutation* die Elemente in $\{1, \dots, n\}$ vertauscht. Es gilt, dass S_n insgesamt $n!$ Elemente enthält, also $\text{Ord}(S_n) = n!$ gilt. Für Permutationen gibt es folgende Schreibweisen:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $\sigma \in S_n$, dann gibt es die sogenannte *Zweizeilenform* in der σ so aussieht:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Eine weitere Schreibweise ist die Darstellung in *Zyklen*. Vertauscht σ die Elemente s_1, \dots, s_k in folgender Form: s_1 wird auf s_k abgebildet und s_j wird auf s_{j-1} für $j \in \{2, \dots, k\}$ abgebildet, dann schreiben wir

$$\sigma = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_k)$$

Die erste Schreibweise ist einfacher zu verstehen, aber unhandlicher. Wir betrachten ein Beispiel aus S_4 . Sei $\sigma \in S_4$ die Permutation die alle Elemente zyklisch vertauscht. Das heißt

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1$$

¹Achtung: In meinen beiden Tutorien hatte ich fälschlicherweise die Ordnung eines Gruppenelements als 0, statt als $+\infty$ definiert, wenn es kein geeignetes, endliches n gibt.

dann schreiben wir das als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Unter jedem Element der ersten Zeile steht also nun, auf welche Zahl es durch σ abgebildet wird.

Etwas komplexer, aber sehr viel praktischer für Rechnungen ist die zweite Schreibweise mit Zyklen. An sich ist ein Zyklus ein Tupel aller Zahlen die von σ verändert werden, indem hinter jede Zahl ihr Urbild geschrieben wird. Betrachten wir die gleiche Permutation wie eben, so erhielten wir

$$\sigma = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$$

Wollen wir hier wissen, worauf eine beliebige Zahl abgebildet wird, gehen wir in den Zyklus und schauen, welche Zahl links davon steht. Wollen wir wissen, was $\sigma(3)$ ist, dann sehen wir in diesem Zyklus, dass 4 links von der 3 steht, also ist $\sigma(3) = 4$. Die einzige Ausnahme bildet dabei immer die erste Zahl des Zyklus. Diese wird immer auf den letzten Eintrag abgebildet. In diesem Fall würden wir, wenn wir wissen wollten, was $\sigma(1)$ ist, also auf die 1 schauen. Da diese an erster Stelle steht, wissen wir, dass ihr Bild an letzter Stelle steht, also $\sigma(1) = 2$ gilt. Kommt eine Zahl in einem Zyklus nicht vor, dann wird sie durch die Permutation unverändert gelassen. Angenommen wir betrachten das Element $(1 \ 4 \ 3 \ 2)$ nun als Permutation in S_5 , dann hätten wir (bei gleicher Schreibweise) nun zusätzlich noch die Information, dass $\sigma(5) = 5$ gilt.

Besonders praktisch ist die Zykelschreibweise bei der Hintereinanderausführung von Permutationen. Schreiben wir, bei obigem Beispiel

$$\sigma(3) = (1 \ 4 \ 3 \ 2)(3) = 4$$

dann sehen wir direkt, wie wir mit Verknüpfungen von Zyklen arbeiten müssen. Es gilt beispielsweise für

$$\sigma_1 = (1 \ 4 \ 3), \quad \sigma_2 = (2 \ 3), \quad \sigma_3 = (1 \ 4)$$

dass (hier werden viele Klammern weggelassen, weil es sonst arg unübersichtlich wird)

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3(2) &= (1 \ 4 \ 3)(2 \ 3)(1 \ 4)(2) \\ &= (1 \ 4 \ 3)(2 \ 3)(2) \\ &= (1 \ 4 \ 3)(3) = 4 \end{aligned}$$

wir arbeiten uns hier also von Rechts nach Links vor. Der erste Zyklus enthält keinen Eintrag 2, also wird die 2 unverändert ausgegeben. Der zweite Zyklus bildet 2 auf 3 ab und der dritte Zyklus bildet 3 auf 4 ab.

Wir suchen eine Untergruppe $G \leq S_4$ mit $\text{Ord}(G) = 6$. Da G eine Untergruppe ist, besteht G aus Permutationen auf $\{1, 2, 3, 4\}$. Wir kennen allerdings bereits eine Gruppe mit 6 Permutationen, die Elemente auf einer Teilgruppe vertauscht.

Auf dem vierten Tutoriumsblatt in Aufgabe 3 hatten wir gezeigt, dass S_n eine Gruppe ist, also natürlich auch S_3 . Wir hatten dort außerdem für beliebige Mengen $Y \subseteq X$ die Abbildung $i: S_Y \rightarrow S_X$ definiert und gezeigt, dass sie ein Monomorphismus ist.

Da $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ gilt, existiert also ein injektiver Homomorphismus $i: S_3 \rightarrow S_4$. Da Bilder von Homomorphismen stets Untergruppen sind und injektive Abbildungen die Anzahl der Elemente erhalten gilt damit $i(S_3) \leq S_4$ und $\text{Ord}(i(S_3)) = 6$, was wir zeigen wollten.

Zur Veranschaulichung überlegen wir uns noch, wie man die Aufgabe ohne die Aufgaben auf dem vierten Tutoriumsblatt lösen könnte (indem man diesen Monomorphismus von Hand konstruiert):

Wir betrachten hierzu die Elemente aus S_3 . Wir wissen, dass S_3 eine Gruppe mit $3! = 6$ Elementen ist, also wäre sie ein geeigneter Kandidat, wenn wir einen Weg finden, sie in S_4 einzubetten. Wir wollen also für jedes Element $\sigma \in S_3$ eine Entsprechung $\sigma' \in S_4$ finden, sodass die Gruppenstruktur erhalten bleibt.² Wir wählen dann $S'_3 = \{\sigma' \mid \sigma \in S_3\}$ als unsere Untergruppe mit 6 Elementen. Eine Möglichkeit diese Elemente darzustellen ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & 4 \end{pmatrix}$$

wenn wir also σ in Zweizeilenform schreiben, dann können wir σ' analog aufschreiben und erhalten damit die Elemente in $S'_3 \leq S_4$. Man müsste nun noch prüfen, dass S'_3 tatsächlich eine Gruppe ist. Übungsaufgabe: Wie sähe das ganze in Zykelschreibweise aus?

Aufgabe 4

Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$$

1. Zeige, dass \mathbb{H} ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ ist.
2. Bestimme die Determinante eines Elements aus \mathbb{H} .
3. Zeige, dass die Menge $\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ abgeschlossen unter Multiplikation ist.

Lösung:

Um die Notation kürzer zu halten werden wir ein Element

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

als (α, β) schreiben. Die Identifikation ist hierbei bijektiv.

1. Wenn wir zeigen wollen, dass \mathbb{H} ein Unterring ist, dann müssen wir zeigen, dass es eine Untermenge ist und mit den gleichen Operationen und neutralen Elementen wie $M_2(\mathbb{C})$ ein Ring.

(a) *Untermenge:*

Das folgt direkt aus der Definition.

(b) *Addition:*

Die Assoziativität und Kommutativität werden direkt aus $M_2(\mathbb{C})$ geerbt. Das neutrale Element der Addition ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

das ist also für $\alpha = \beta = 0$ gegeben. Man sieht direkt, dass \mathbb{H} unter Addition abgeschlossen

²Das ist natürlich genau das, was unser injektiver Homomorphismus i macht.

ist, da $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ gilt:^a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ -(\beta + \delta) & \alpha + \gamma \end{pmatrix}.$$

Sei ein beliebiges Element (α, β) gegeben. Da $-\alpha, -\beta \in \mathbb{C}$ gilt, ist damit auch $(-\alpha, -\beta)$ in \mathbb{H} . Da die Addition von Matrizen aber komponentenweise geschieht, haben wir damit das Inverse zu (α, β) gefunden. Wir haben alle Eigenschaften gezeigt, also ist \mathbb{H} bezüglich Addition eine Untergruppe.

(c) *Multiplikation:*

Auch hier wird die Assoziativität direkt von $M_2(\mathbb{C})$ geerbt. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist $\mathbf{1}_2$, aber das liegt mit $(1, 0)$ auch in \mathbb{H} . Interessant ist hier nur noch die Abgeschlossenheit, da es für einen Ring nicht notwendig ist, dass jedes Element bezüglich der Multiplikation ein Inverses hat (Es gibt auch in $M_2(\mathbb{C})$ zahlreiche nichtinvertierbare Matrizen!). Wir bestimmen also für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) & (\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) \\ -(\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) & (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) \end{pmatrix}$$

also ist auch das Produkt wieder in \mathbb{H} . Damit ist die Multiplikation ein Monoid.

Wir haben hiermit gezeigt, dass \mathbb{H} ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ ist.

2. Wir bestimmen die Determinante eines Elements aus \mathbb{H} . Dazu seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann gilt mit der Regel für 2×2 Matrizen:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Schreiben wir $\alpha = a + ib$ und $\beta = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt also

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

3. Wir betrachten die Menge

$$D = \{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

und sehen mit der letzten Gleichung der zweiten Teilaufgabe, dass es für jedes $x \in D$ ein Element in $q \in \mathbb{H}$ gibt, sodass $\det(q) = x$ gilt. Wir wollen Abgeschlossenheit zeigen, also müssen wir beweisen, dass es für $x, y \in D$ ein Element $z \in D$ gibt, sodass $xy = z$. Angenommen $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, y = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$, dann ist eine direkte Bestimmung der Koeffizienten $z = j^2 + k^2 + l^2 + m^2$ möglicherweise recht schwierig. Es gilt aber für $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ und $\gamma = e + if, \delta = g + ih$, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) & (\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) \\ -(\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) & (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) \end{pmatrix}$$

wobei wir das Ergebnis aus der zweiten Teilaufgabe verwendet haben. Wir haben nun erneut ein Element in \mathbb{H} , anders gesagt, mit $\kappa = \alpha\gamma - \beta\bar{\delta}$ und $\lambda = \alpha\delta + \beta\bar{\gamma}$ haben wir das Element

$$\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\kappa} \end{pmatrix}$$

gefunden. Da $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ liegen, gibt es natürlich auch Zahlen $j, k, l, m \in \mathbb{R}$ mit $\kappa = j+ik, \lambda = l+im$. Die Determinante ist multiplikativ, also folgern wir

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) &= \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) & (\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) \\ -(\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) & (\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\kappa} \end{pmatrix} = j^2 + k^2 + l^2 + m^2 \end{aligned}$$

das heißt das Produkt unserer beiden ursprünglichen Elemente liegt wieder in D , also ist D abgeschlossen unter Multiplikation.

^aDas ist kein Bruch, auch wenn es so aussieht.