Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 11

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

Zur Bestimmung von Determinanten hatten wir bei der ersten Aufgabe von letzter Woche bereits einiges geschrieben, wir werden hier kein neues Wissen anwenden.

1. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall bietet sich eine Entwicklung nach der letzten Zeile an, da dort alle Einträge bis auf einer 0 sind. Damit fallen bereits alle 3×3-Determinanten bis auf eine weg. Es gilt also

$$\det(A) = (-1)^6 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Man könnte hier die Formel von Sarrus anwenden oder nach der zweiten Zeile entwickeln. Es kommt aufs gleiche raus. Die Entwicklung nach der zweiten Zeile lautet

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei wir diese Determinante nun mit der üblichen 2×2-Formel berechnen. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 8 = -7$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\det(A) = 2 \cdot 2 \cdot -7 = -28$$

2. Wir betrachten

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall gibt es keine Zeile oder Spalte nach der man besonders gut entwickeln kann, da es in jeder Zeile und Spalte nur einen Term gibt, der gleich 0 ist. Wir können aber nach der zweiten Spalte entwickeln, weil wir dort immerhin zweimal den Koeffizienten 1 haben. Es gilt also

$$\det(B) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^6 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Determinanten der Untermatrizen mit Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 6 - 32 = -30$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3 - 12 + 16 = 7$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 16 - 1 = -13$$

also gilt

$$\det(B) = -(-30) + 7 + 2 \cdot (-13) = 11$$

Manchmal kann es schneller gehen, wenn man den Gauß-Algorithmus verwendet, oder eine Mischung aus beidem - das ist aber je nach Matrix unterschiedlich und kann a priori schwer gesagt werden. Hier könnte man beispielsweise die erste Aufgabe auch so lösen:

Wir ziehen zuerst die erste Zeile viermal von der dritten Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_3 - 4Z_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Determinante nicht ändern. Wir entwickeln nun nach der ersten Spalte. Da es dort nur einen Term gibt, der als Vorfaktor +1 hat, müssen wir also nur die Determinante der nächsten Matrix bestimmen:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & -7 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und hier können wir nach der dritten Zeile entwickeln und müssen nur die Determinante einer 2×2-Matrix bestimmen, die auch noch besonders simpel ausfällt:

$$\det(A) = (-1)^6 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-14) = -28$$

Sieht man diese Kombination aus Zeilentransformationen und Laplace-Entwicklung schnell, kann man sich einiges an Zeit sparen.

Aufgabe 2
Bestimme die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

einmal mit der Kofaktormatrix und einmal mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Lösung:
Wir hatten bereits die Inverse einer Matrix definiert und festgestellt, dass nicht alle Matrizen invertierbar sind. Es gilt allerdings folgende Aussage:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Matrix A ist invertierbar.
2. Die Matrix A^T ist invertierbar.
3. Die Zeilenvektoren der Matrix bilden eine Basis von $\mathbb{K}^n$.
4. Die Zeilenvektoren der Matrix sind linear unabhängig.
5. Es gilt $\det(A) \neq 0$.

wobei wir die zweite Eigenschaft nur deshalb erwähnen, weil sie verdeutlicht, dass man statt Zeilenvektoren in diesem Satz genauso gut hätte Spaltenvektoren schreiben können. Die Eigenschaften können auf unterschiedliche Art geprüft werden, am effizientesten ist jedoch meistens die Bestimmung der Determinante, da das normalerweise schneller geht als das Gleichungssystem zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit zu lösen.

Man beachte, dass man hiermit natürlich auch überprüfen kann ob eine Menge von n Vektoren eine Basis sind indem man sie in einer Matrix nebeneinander schreibt und danach die Determinante bestimmt. Anschaulich kann man sich den Zusammenhang auch so überlegen: Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann eine Basis, wenn sie den gesamten Raum aufspannen. Der gesamte Raum wird von den Vektoren aber genau dann aufgespannt, wenn das von ihnen aufgespannte n-Volumen ungleich Null ist. Die Determinante entspricht aber dem von den Vektoren aufgespannten Volumen.

Eine andere Sichtweise ist folgende: Wenn eine Matrix invertierbar ist, dann ist sie Darstellungsmatrix einer invertierbaren linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Abbildungen sind genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv sind, also muss f bijektiv sein. Eine bijektive Abbildung ist insbesondere surjektiv, also muss das Bild von f genau n-dimensional sein, das heißt der Rang von f ist n.

Der Rang der linearen Abbildung entspricht aber dem Rang der darstellenden Matrix A, also muss A vollen Rang haben, ergo linear unabhängige Zeilen haben.

Wenn wir eine Matrix invertieren wollen, dann ist der erste Schritt üblicherweise zu überprüfen, ob sie überhaupt invertierbar ist, also fängt man üblicherweise mit der Determinante an. Die Determinante kann man für die Invertierung mithilfe der Kofaktormatrix auch direkt verwenden. Wir definieren dafür

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ist die *Kofaktormatrix* $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix mit Einträgen $\alpha_{j,k}$, wobei gilt, dass

$$\alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \cdot \det(A_{j,k})$$

wobei $A_{j,k}$ die $n-1 \times n-1$ Untermatrix ist, bei der die j-te Zeile und k-te Spalte gestrichen wurden.

Wir definieren weiterhin noch die *Adjunkte* von A durch

$$\mathsf{adj}(A) = \tilde{A}^T$$

Wir interessieren uns im Endeffekt für die Adjunkte[1], denn es gilt

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt

$$\mathsf{adj}(A) \cdot A = \det(A)\mathbb{1}_n$$

also insbesondere

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathsf{adj}(A)$$

unsere Aufgabe wird also sein die Kofaktormatrix und die Determinante zu bestimmen, denn damit können wir direkt die Inverse einer Matrix ausrechnen. Insgesamt müssen wir also eine Determinante der Größe $n \times n$ und n^2 Determinanten der Größe $n-1 \times n-1$ bestimmen. Das ist üblicherweise ziemlich viel Rechenaufwand und den sparen wir uns gerne. Es kann deutlich schneller sein, wenn man die Inverse mithilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt. Dafür beginnen wir mit einer erweiterten Koeffizientenmatrix, bei der links die Matrix A steht und rechts die Einheitsmatrix und formen dies per Gauß um, bis links die Einheitsmatrix steht. Dann steht rechts die Inverse zu A. Wir werden anhand der Aufgabe genauer sehen, wie das gemeint ist.

Wir wollen zuerst die Kofaktormatrix bestimmen und darüber dann die Inverse. Wir prüfen als erstes, ob A überhaupt invertierbar ist, indem wir die Determinante bestimmen. Wir verwenden die Regel von Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 1 = 3$$

da $\det(A) \neq 0$ ist die Matrix also invertierbar. Als nächstes bestimmen wir die Einträge der Kofaktormatrix. Da diese jeweils von der Form

$$\alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \cdot \det(A_{j,k})$$

[1]Man sollte die Adjunkte nicht mit der Adjungierten verwechseln. Denn letztere, also $A^\star$ ist das Transponierte und komplex Konjugierte von A.

sind, müssen wir also insgesamt 9 Determinanten von 2×2-Matrizen bestimmen. Das geschieht jeweils mit der üblichen Formel für 2×2-Matrizen. Wir beachten, dass wir diese Determinanten noch mit Vorzeichen in der Form

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

versehen müssen. Wir bestimmen beispielsweise für die Einträge der ersten Zeile:

$$\alpha_{1,1} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\alpha_{1,2} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\alpha_{1,3} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Die Einträge haben natürlich eine Ähnlichkeit zu den Termen der Laplace-Entwicklung, im Gegensatz dazu wird hier aber der Eintrag der Matrix "an dieser Stelle" nicht berücksichtigt. Wir bestimmen die anderen 6 Einträge und erhalten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Adjunkte ist nun die transponierte Matrix also

$$\mathsf{adj}(A) = \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und da $A^{-1} = \det(A)^{-1}\mathsf{adj}(A)$ gilt, erhalten wir

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das ganze nun mit dem Gauß-Algorithmus. Idealerweise sollte hier das gleiche

Ergebnis herauskommen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 + 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 - \frac{1}{3}Z_3]{Z_1 - \frac{1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \cdot \frac{1}{3}]{Z_1 - 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Wir können die inverse Matrix nun auf der rechten Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen. Es gilt also

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welches der Verfahren man lieber mag ist jedem selbst überlassen, ich würde aber empfehlen, beide zu beherrschen, falls in der Klausur explizit nach einem der beiden gefragt wird.

Aufgabe 3
Bestimme die Determinanten über $\mathbb{C}$ von

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

Lösung:
Im Prinzip werden auch hier keine neuen Verfahren angewandt, aber man muss nicht mehr die Determinante einer einzelnen Matrix angeben, sondern eine Formel für die Bestimmung der Determinante einer ganzen Familie von Matrizen auf einmal angeben. Die Auslassungspunkte sind hierbei so zu verstehen, dass die Matrix auf logische Art und Weise fortgesetzt wird. Es kann manchmal nicht ganz einfach sein zu bestimmen, wie genau dieses logische Fortsetzen aussieht, aber meistens hilft es sich hier, wenn man sich die Matrizen für kleine n explizit aufschreibt.

Das ist eh zu empfehlen, weil man für Matrizen dieser Art (in Aufgaben - in der freien Natur nicht unbedingt) üblicherweise entweder eine von der Größe unabhängige Formel, oder eine relativ simple von n abhängige, geschlossene Formel erhält. Hat man das dann für $n = 1, 2, 3$ schon bestimmt, kann man häufig bereits die Formel erraten. Arbeitet man dann mit einem bestimmten Ziel vor Augen kann es häufig bereits sehr viel einfacher sein, die Determinante allgemein zu bestimmen.

1. Wir fangen an die Determinante für kleine Arten dieser Matrix zu bestimmen. Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\det(A_1) = 1, \quad \det(A_2) = 2, \quad \det(A_3) = 6$$

wir könnten also die Vermutung aufstellen, dass $\det(A_n) = n!$. Wir wollen das nun mit Induktion zeigen. Der Induktionsanfang ist mit $\det(A_1) = 1$ bereits getan. Also nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein n bereits gilt und betrachten die Matrix

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n+1 \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die erste und die letzte Zeile bis auf den $n+1$-ten Eintrag gleich, mit vertauschten Vorzeichen sind. Also addieren wir die erste Zeile zur letzten. Dabei ändert sich natürlich im Rest der Matrix nicht und wir erhalten nun

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & \star \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Die Einträge in der letzten Spalte sind dabei durchgehend $n+1$ - interessanter sind aber die Einträge in der letzten Zeile, denn diese sind bis auf den letzten alle Null. Wir können nun also eine Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile durchführen und erhalten

$$\det(A_{n+1}) = (n+1)\det(A_n) \overset{\text{IV}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$$

also ist unsere Aussage auch für A_{n+1} gültig. Mit vollständiger Induktion schließen wir, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \det(A_n) = n!$$

2. Wir betrachten erneut zuerst kleine Matrizen und deren Determinanten:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(B_1) = 2, \quad \det(B_2) = 3, \quad \det(B_3) = 4$$

und sehen, dass $\det(B_n) = n+1$ eine mögliche Lösung wäre. Auch hier wollen wir das mithilfe von Induktion zeigen:

Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein n bereits gilt und betrachten

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Möglichkeit ist hier die Entwicklung nach der ersten Zeile. Damit erhalten wir

$$\det(B_{n+1}) = 2\det(B_n) - 1\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

den ersten Term können wir mit der Induktionsvoraussetzung bestimmen, für den zweiten Term fällt uns auf, dass wir die Matrix in folgender Form schreiben können:

$$\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Hierbei steht 0 natürlich für einen $n-1$-Vektor voller Nullen. Wir entwickeln diese Matrix nach der ersten Spalte und erhalten insgesamt also

$$\det(B_{n+1}) = 2\det(B_n) - 1\det(B_{n-1})$$

Wir müssen unsere Induktionsvoraussetzung nun anpassen und annehmen, dass die Aussage für n und $n+1$ gilt. Den Induktionsanfang können wir aber wie bisher nehmen, da wir die Aussage ja nicht nur für B_1, sondern auch für B_2 gezeigt haben. Es gilt also

$$\det(B_{n+1}) \overset{\text{IV}}{=} 2(n+1) - n = n+2 = (n+1)+1$$

also gilt die Aussage auch für Matrizen der Größe $n+1$. Mit vollständiger Induktion schließen wir, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \det(B_n) = n+1$$

Vielleicht noch ein Wort zu dieser “doppelten” Induktion. Eigentlich passiert hier auch nichts anderes als bei der Induktion, wie wir sie kennen. Normalerweise nimmt man einen Induktionsanfang $n = 1$. Dann impliziert die Aussage für $n = 1$, dass sie auch für $n = 2$ gilt. Die Aussage für $n = 2$ impliziert, dass sie auch für $n = 3$ gilt und so weiter.

In unserem Fall zeigen wir zuerst die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$ manuell. Diese beiden Aussagen implizieren dann mit unserem Induktionsschritt, dass die Aussage für $n = 3$ gilt. Die Aussagen für $n = 2$ und $n = 3$ implizieren, dass sie für $n = 4$ gilt und so weiter.

Aufgabe 4

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $A : V \to V$ eine nichttriviale lineare Abbildung, sodass $A^2 = A$ gilt. Zeige, dass es einen Eigenvektor $v \in V$ zum Eigenwert 1 gibt.

Lösung:

Wir wiederholen die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann nennen wir $\lambda \in \mathbb{K}$ einen *Eigenwert* und $v \in V \setminus \{0\}$ einen *Eigenvektor zum Eigenwert* λ, wenn die Gleichung

$$Av = \lambda v$$

erfüllt ist. Die lineare Hülle aller Eigenvektoren zu λ nennen wir *Eigenraum zu* λ.

Analog können wir diese Definition auch für Matrizen wiederholen, bzw. man könnte Eigenwerte und Eigenvektoren auch erst für Matrizen definieren und das dann auf lineare Abbildungen übertragen. Kernpunkt der Definition ist also, dass ein Eigenvektor zu einer Matrix von dieser nur gestreckt/gekürzt wird, die Richtung aber immer gleich bleibt. Wenn man einen Eigenvektor kennt, dann kennt man gleich noch mehr, in unendlichen Körpern jeweils unendlich viele - denn die Eigenvektoren bilden einen Vektorraum. Das sieht man so: Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben. Sei nun $\alpha \in \mathbb{K}$ ein beliebiger Skalar und seien $v, w \in \mathbb{K}^n$ zwei Eigenvektoren zu λ. Wir müssen hier nur Abgeschlossenheit zeigen, da alle anderen Vektorraumeigenschaften aus $\mathbb{K}^n$ geerbt werden. Es gilt

$$A(\alpha v + w) = A\alpha v + Aw = \alpha\lambda v + \lambda w = \lambda(\alpha v + w)$$

insbesondere ist $\alpha v + w$ also erneut ein Eigenvektor und damit ist die Menge aller Eigenvektoren beinahe ein Vektorraum. Eine Kleinigkeit haben wir hier bisher übergangen - in der Definition verlangen wir für einen Eigenvektor, dass $v \neq 0$, aber ein Vektorraum muss immer die 0 enthalten. Das ist auch der Grund, wieso wir die lineare Hülle der Eigenvektoren und nicht nur die Eigenvektoren selbst wählen. Durch das Hinzufügen dieses einen Vektors erhalten wir schließlich einen vollständigen Vektorraum.

Der Grund wieso $v = 0_V$ nicht als Eigenvektor gezählt wird ist folgender. Für jeden beliebigen Skalar $\mu \in \mathbb{K}$ gilt, dass

$$A \cdot 0_V = \mu \cdot 0_V = 0_V$$

also wäre dann jedes Element in $\mathbb{K}$ ein Eigenwert und unsere Definition ohne Sinn.

Wir werden uns auf dem nächsten Übungsblatt mit der Bestimmung von Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen beschäftigen und auch eine Anwendung werden wir dort kennen lernen. Die Aufgabe selbst:

Wir betrachten die Matrix $A \neq 0$ mit $A^2 = A$. Da die Matrix nichttrivial ist, ist ihr Bild insbesondere nicht leer. Sei also $v \in V \setminus \ker(A)$. Dann gilt

$$A^2 v = Av \neq 0$$

Das heißt für den Vektor $0 \neq w = Av$ gilt damit

$$Aw = w$$

was genau der Eigenwertgleichung für den Eigenwert 1 entspricht. Also hat A mindestens einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.