Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 12

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Bestimme die Eigenwerte mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eigenwerte, sowie ihre Vielfachheiten und wie man diese bestimmt, wurden auf den letzten beiden Blättern erläutert.

Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom von A. Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda)(-8-\lambda) - 135 - 144 + 18(6-\lambda) + 54(2-\lambda) - 20(-8-\lambda) = \lambda^3 - 1$$

Wir können direkt ablesen, dass eine der Nullstellen 1 ist, also gilt $\lambda_1 = 1$. Wir bestimmen

$$(\lambda^3 - 1) : (\lambda - 1) = x^2 + x + 1$$

Die Mitternachtsformel gibt uns

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

also sind unsere beiden anderen Eigenwerte komplex. Es hängt nun von der Wahl des zugrundeliegenden Körpers ab, was unsere Antwort ist.

- Gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann gibt es nur einen Eigenwert. Da dieser die algebraische Vielfachheit 1 hat, ist auch seine geometrische Vielfachheit 1. Achtung: Auch wenn die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen, ist diese Matrix nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, da die Summe der algebraischen/geometrischen Vielfachheiten nicht 3 ist.

- Gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann gibt es drei Eigenwerte, nämlich $\{1, -\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$. Da jeder dieser Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1 hat wissen wir, dass auch die geometrischen Vielfachheiten 1 sind. Da die Summe der Vielfachheiten 3 ist, wäre die Matrix über $\mathbb{C}$ also diagonalisierbar.

Aufgabe 2

Bestimme die Eigenwerte und entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$$

Ist die Matrix über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Lösung:
Es gibt einen Satz für Determinanten von Blockmatrizen:

> Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Seien weiter $B_1 \in M_{k_1}(\mathbb{K}), \dots, B_r \in M_{k_r}(\mathbb{K})$ Matrizen, sodass $\sum_{j=1}^r k_j = n$. Ist A von der Form
>
> $$A = \begin{pmatrix} B_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & B_2 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_r \end{pmatrix}$$
>
> dann gilt
>
> $$\det(A) = \prod_{j=1}^r \det(B_j)$$

Haben wir also eine Matrix die wir so in Blöcke aufteilen können, dass es eine *Diagonale* gibt, die nur aus quadratischen Matrizen besteht und die unter (bzw. über) dieser Diagonalen nur Nulleinträge hat, können wir die Determinante sehr viel einfacher bestimmen, indem wir die Determinanten der einzelnen Blöcke multiplizieren. Wir werden das hier anwenden:

Die Matrix A kann auch geschrieben werden als

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 B_2 & \end{pmatrix}$$

wobei

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wir verwenden den Satz über Determinanten von Blockmatrizen und bestimmen zuerst

$$\det(B_1 - \lambda \mathbb{1}_2) = (1 - \lambda)^2$$
$$\det(B_2 - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda(1 - \lambda)^2$$

Und berechnen

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_5) = \det(B_1 - \lambda \mathbb{1}_2) \det(B_2 - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda(1 - \lambda)^4$$

also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 4. Wir bestimmen nun die Eigenräume. Wir bestimmen für $\lambda_1 = 0$ den Kern von

$A - 0\mathbb{1}_5 = A$. Man kann an der Matrix A direkt ablesen, dass $Ae_5 = 0$, also liegt e_5 im Kern. Da die geometrische Vielfachheit nicht größer sein kann als die algebraische Vielfachheit, kann es auch keine weiteren Eigenvektoren geben.

Für $\lambda_2 = 1$ bestimmen wir den Kern von $A - 1\mathbb{1}_5$, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir haben hier drei Nullzeilen und die anderen beiden Zeilen sind bereits in Zeilenstufenform, also ist der Kern Dreidimensional. Auch hier können wir direkt ablesen, dass $e_1, e_3, e_4 + e_5$ geeignete Lösungen des homogenen Gleichungssystems sind. Wir haben also bestimmt:

$$E_A(\lambda_1) = < e_5 >$$
$$E_A(\lambda_2) = < e_1, e_3, e_4 + e_5 >$$

insbesondere ist die geometrische Vielfachheit $V_\mu(\lambda_2) = 3 \neq 4 = V_\alpha(\lambda_2)$, also ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

gegeben. Bestimme A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Diese Aufgabe ist ähnlich zur letzten Aufgabe auf Blatt 13.

Eine direkte Berechnung von A^n ist vermutlich kompliziert, deswegen möchten wir einen einfacheren Weg. Wir bestimmen dafür die Eigenvektoren von A. Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = (-6 - \lambda)(9 - \lambda) + 50 = \lambda^2 - 3 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$. Da jeder von diesen Eigenwerten algebraische Vielfachheit 1 hat, ist die Matrix diagonalisierbar, das heißt wir finden eine Basis aus Eigenvektoren. Wir bestimmen die Eigenvektoren durch

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Wobei natürlich alle Vielfachen von v_1, v_2 auch gültige Eigenvektoren wären.). Wir können nun die Standardbasis darstellen durch

$$e_1 = v_1 - v_2$$
$$e_2 = 2v_2 - v_1$$

Es gilt $A^n = A^n \mathbb{1}_2$ und die Einheitsbasis hat als Spalten genau die Einheitsvektoren e_1, e_2. Wir können die Wirkung von A^n auf die beiden Vektoren einzeln beschreiben, die Spalten von A^n sind dann $A^n e_1$ und $A^n e_2$. Wir bestimmen also

$$
\begin{aligned}
A^n e_1 &= A^n(v_1 - v_2) = (-1)^n v_1 - 4^n v_2 \\
A^n e_2 &= A^n(2v_2 - v_1) = -(-1)^n v_1 + 2 \cdot 4^n v_2
\end{aligned}
$$

Wir stellen die Vektoren v_1, v_2 wieder in der Standardbasis dar und erhalten

$$
\begin{aligned}
A^n e_1 &= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 4^n \\ (-1)^n - 4^n \end{pmatrix} \\
A^n e_2 &= \begin{pmatrix} -2(-1)^n + 2 \cdot 4^n \\ -(-1)^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und damit gilt

$$
A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n - 4^n & -2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 4^n \\ (-1)^n - 4^n & -(-1)^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}
$$

Alternativ hätten wir auch eine Basistransformation vornehmen können und die Wirkung von A^n in Diagonalform auf die Vektoren ausrechnen können - und diese dann wieder zurücktransformieren. Das ist aber im Endeffekt genau das Gleiche.

Aufgabe 4
Sei

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})
$$

gegeben. Bestimme die Spur von A^n

Lösung:
Die Spur einer Matrix ist wie folgt definiert.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit Einträgen $\alpha_{i,j}$. Dann ist die *Spur* von A definiert als

$$
\mathsf{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}
$$

Die Spur einer Matrix ist, genau wie die Determinante, basisunabhängig. Das heißt egal wie wir die Matrix darstellen, sie hat immer die gleiche Spur. Es gilt

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (Wiederholungen erlaubt). Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \\
\mathsf{tr}(A) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j
\end{aligned}
$$

Für diagonalisierbare Matrizen kann man das sofort sehen indem man sie in ihrer Eigenbasis darstellt. Denn dann sind die Diagonaleinträge genau die Eigenwerte. Es gilt aber auch für alle anderen Matrizen! Wir nutzen das nun wie folgt aus:

Um die Spur direkt zu berechnen müssten wir A^n berechnen. Dabei könnten wir vorgehen wie in Aufgabe 3. Dafür müssten wir allerdings eine Eigenbasis bestimmen, die Standardbasis in der Eigenbasis darstellen und danach wieder zurücktransformieren. In diesem Fall wollen wir allerdings nur die Spur der Matrix wissen - wie die Einträge konkret lauten ist nicht wichtig. Also nehmen wir einen kürzeren Weg und überlegen uns: Ist A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dann gibt es eine Transformationsmatrix T, sodass

$$T^{-1}AT = \mathsf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$$

Es gilt $\mathsf{tr}(A) = \mathsf{tr}(D)$. Wir können das wie folgt verallgemeinern:

$$D^n = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{=\mathbb{1}_3}A\underbrace{TT^{-1}}_{=\mathbb{1}_3}\dots\underbrace{TT^{-1}}_{=\mathbb{1}_3}AT = T^{-1}A^nT$$

Also bekommen wir D^n durch einen Basiswechsel aus A^n - das heißt aber auch, dass D^n und A^n die gleiche Spur haben. Da D diagonal ist, gilt

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$\mathsf{tr}(A^n) = \mathsf{tr}(D^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$$

Wir bestimmen also nun die Eigenwerte von A. Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6 + 6 - \lambda - 9\lambda - 4\lambda = -(\lambda^3 + 14\lambda)$$

Der erste Eigenwert ist $\lambda_1 = 0$, den kann man sofort ablesen. Die Nullstellen von $\lambda^2 + 14$ sind $\sqrt{-14} = \pm i\sqrt{14}$. Mit obiger Rechnung folgt daraus sofort

$$\mathsf{tr}(A^n) = (i\sqrt{14})^n + (-i\sqrt{14})^n$$

Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung nach n vor. Es gilt:

- Sei $n = 0 \mod 4$, dann gilt $i^n = (-i)^n = 1$, also $\mathsf{tr}(A^n) = 2\sqrt{14}^n$.
- Sei $n = 1 \mod 4$, dann gilt $i^n = i, (-i)^n = -i$, also heben sich die beiden Terme gegenseitig auf. Es gilt also $\mathsf{tr}(A^n) = 0$.
- Sei $n = 2 \mod 4$, dann gilt $i^n = (-i)^n = -1$, also $\mathsf{tr}(A^n) = -2\sqrt{14}^n$.
- Sei $n = 3 \mod 4$, dann gilt $i^n = -i, (-i)^n = i$, also heben sich die beiden Terme gegenseitig auf, also $\mathsf{tr}(A^n) = 0$.

Wir sehen hier ein gutes Beispiel dafür, dass die Spur von Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ auch wieder in $\mathbb{Z}$ liegt.

Die Aussage, dass $\mathsf{tr}(A^n) = \mathsf{tr}(D^n) = \prod_{j=1}^m \lambda_m$ gilt, kann natürlich für alle $m \in \mathbb{N}$ verallgemeinert werden.