Lineare Algebra I

Lösungsskizzen zum Tutoriumsblatt 1

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben, die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Die ersten Lösungen sind noch sehr umfangreich, da ich versuchen werde ein bisschen mathematische Denkweise zu erläutern. Diese sollte man möglichst schnell verinnerlichen - die Detailliertheit dieser Lösungen wird schnell abnehmen und sich bald auf die konkreten Beweisschritte beschränken.

Aufgabe 1

Sei U eine Menge. Sei I eine beliebige Indexmenge und seien $(A_i)_{i\in I}, A, B, C \subseteq U$ Teilmengen. Zeige die folgenden Aussagen:

1. $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$$

2. $$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$$

3. $$\overline{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

4. $$\overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

5. $$A\Delta B = B\Delta A$$

6. $$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

7. $$A\Delta\varnothing = A$$

8. $$A\Delta A = \varnothing$$

9. $$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

10. $$(A\Delta B) = (A \cup B)\setminus(A \cap B)$$

11.
$$(A \Delta B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

12.
$$(A \cap B) \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$$

Lösung:
Wir werden exemplarisch einige der Lösungen hier ausführen, den Großteil aber nicht, da das nur zu Wiederholungen führen würde.

Gleichheit von Mengen Zwei Mengen sind gleich genau dann [a], wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Seien also A, B zwei Mengen, dann können wir die Gleichheit zeigen, indem wir beweisen, dass jedes Element aus A auch in B liegt und umgekehrt jedes Element aus B auch in A. In Formeln:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A) \tag{1}$$

Natürlich ist es im Allgemeinen nicht möglich, für jedes einzelne Element einer Menge explizit zu zeigen, dass es auch in einer anderen Menge liegt. Deswegen wird unser Vorgehen sein, uns ein allgemeines Element aus dieser Menge zu wählen und dann die Zugehörigkeit zur anderen Menge zu zeigen. In der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ist das ganze unter dem Extensionalitätsaxiom

$$\forall A, B : A = B \leftrightarrow \forall C : (C \in A \leftrightarrow C \in B) \tag{2}$$

bekannt.

[a] Die Formulierung "Genau dann", oder auch "Wenn und nur wenn" bedeutet Äquivalenz. a ist genau dann wahr, wenn b wahr ist, bedeutet in Formeln $A \Leftrightarrow B$

Beginnen wir also nun mit der ersten Teilaufgabe

1.
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

Wir wollen nun wie angesprochen vorgehen und wählen uns ein beliebiges Element $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$. Zuerst einmal überlegen wir uns das ganze wie folgt:

Sei x ein Element in $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$, dann liegt es im Schnitt von $\bigcup_{i \in I} A_i$ und B, also liegt es in jeder der beiden Mengen.
Wenn x in $\bigcup_{i \in I} A_i$ liegt, dann gibt es mindestens ein $i \in I$, nennen wir es j, sodass x in diesem A_j liegt. Natürlich liegt x auch weiterhin in B.
Wenn x in A_j und in B liegt, dann liegt es per Definition im Schnitt von A_j und B.
Wenn x im Schnitt von A_j und B liegt, dann gibt es mindestens ein $i \in I$ (nämlich j), sodass x in $A_i \cap B$ liegt.
Da es mindestens ein $i \in I$ gibt, sodass x in $A_i \cap B$ liegt, liegt es in der Vereinigung aller $A_i \cap B$, also in $\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$.
Insgesamt liegt also jedes Element das in der Menge auf der linken Seite liegt auch in der Menge auf der rechten Seite.
Das bedeutet, dass $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$ eine Teilmenge von $\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$ ist. Das wollten wir zeigen.

Man beachte hier das allgemeine Vorgehen: Wir haben das x so gewählt, dass das einzige, was wir über unser Element wissen ist, dass es in der Menge auf der linken Seite liegt. Insbesondere heißt das, dass wir jedes einzelne Element der linken Menge explizit in den Beweis einsetzen könnten und er würde immer noch genauso funktionieren. Die Benennung des Indexelements j ist hierbei willkürlich - sie dient nur dem besseren Verständnis, trägt aber keine mathematische Information in sich. Wir hätten es auch einfach bei $i \in I$ belassen können.
Gut, der Beweis ist geführt, er ist allerdings sehr umständlich und ausführlich, so etwas würde man normalerweise nicht schreiben. Wir wollen diese Sätze nun in prädikatenlogische Sprache übersetzen:

Sei $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in B && (3)\\ &\Rightarrow \exists i \in I : x \in A_i \wedge x \in B && (4)\\ &\Rightarrow \exists i \in I : x \in A_i \cap B \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) && (5) \end{aligned}$$

Also gilt $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B \subset \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.

Dieser Beweis ist wesentlich präziser und kürzer. Wenn man sich einmal an die Sprache gewöhnt hat, ist er definitiv auch besser lesbar. Man sollte allerdings bedenken, dass für größere Beweise Seite um Seite solcher Formeln notwendig wären und das ist wiederum überhaupt nicht lesbar. Der tatsächlich beste Stil liegt also irgendwo in der Mitte zwischen Ausführlichkeit und präzisen Formeln. Das ist etwas, das man durch Erfahrung am besten lernt und das sicherlich auch sehr subjektiv ist.
Der zweite Beweis hat allerdings noch einen weiteren Vorteil: Wenn wir ihn nun von Rechts nach Links (und von Unten nach Oben) lesen, so stellen wir fest, dass jede der Implikationen auch in die andere Richtung geht, also tatsächlich eine Äquivalenz ist. Wir sparen uns nun die Mühe, jeden einzelnen Schritt noch einmal in umgekehrter Reihenfolge aufzuschreiben, sondern ändern unseren obigen Beweis ab zu:

Sei $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in B && (6)\\ &\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i \wedge x \in B && (7)\\ &\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i \cap B \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) && (8) \end{aligned}$$

Also gilt $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$

Damit hätten wir die erste Teilaufgabe bewiesen.

2. Diese Teilaufgabe sieht ähnlich aus, nur die Schnittmengen und Vereinigungen wurden vertauscht. Unser Argument wird auf den ersten Blick auch ähnlich aussehen, aber im Gegensatz zur ersten Teilaufgabe werden wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Die Idee ist hierbei wie folgt: Sind p, q, r logische Aussagen und wir wollen $p \vee q \Rightarrow r$ beweisen, also "Wenn p oder q

gilt, dann gilt auch r", dann reicht es schon $p \Rightarrow r$ und $q \Rightarrow r$ zu zeigen. Diese Fälle so einzeln zu betrachten ist oft einfacher.

"$\subseteq$" Sei $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$, dann ist x in $\bigcap_{i \in I} A_i$ oder in B.
Nehmen wir an, dass $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ gilt. Dann gilt $\forall i \in I : x \in A_i$. Wenn x in einer Menge A_i liegt, dann liegt x aber auch sicher in $A_i \cup B$, das heißt x liegt für alle $i \in I$ in der Menge $A_i \cup B$. Also gilt $x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$.
Nehmen wir an, dass $x \in B$ gilt. Dann gilt, dass x auch in $A_i \cup B$ liegt, unabhängig davon, was A_i ist. Also ist sicherlich $x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$.
Da wir für beide Möglichkeiten gezeigt haben, dass x in der rechten Menge liegt, gilt diese Aussage immer. Das bedeutet wir haben $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B \subseteq \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$ gezeigt.

"$\supseteq$" Sei $x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$ also in jeder Menge $A_i \cup B$. Für ein festes $j \in I$ heißt das x liegt entweder in A_j oder in B. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
Angenommen x liegt in B. Dann liegt x auch in der Vereinigung von B mit einer beliebigen Menge, also gilt $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$. In diesem Fall sind wir fertig.
Angenommen x liegt nicht in B. Dann gilt für jedes $i \in I$: $x \in A_i \cup B \Rightarrow x \in A_i$. Das heißt $x \in A_i$ für jedes $i \in I$, also liegt x im Schnitt aller A_i. Dann liegt es aber auch in $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$ und wir sind fertig.

Da wir beide Richtungen gezeigt haben, gilt Gleichheit.

3. Eine weitere Möglichkeit Beweise dieser Art zu führen ist, dass man direkt Mengen in intensionaler Schreibweise ineinander umwandelt. Dafür erinnern wir uns, dass alle Mengen A_i, B Teilmengen von U sind. Wir können also jede dieser Mengen als die Menge aller x betrachten, die eine gewisse Eigenschaft erfüllen, beispielsweise in B zu sein. Man kann also schreiben $B = \{x \in U \mid x \in B\}$. In diesem konkreten Fall ist das natürlich nicht besonders hilfreich, aber man könnte eine Schnittmenge schreiben als $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Für diese Aufgabe sähe das dann zum Beispiel so aus:

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)} &= \{x \in U \mid \neg x \in (\cup_{i \in I} A_i)\} && (9)\\
&= \{x \in U \mid \neg(\exists i \in I : x \in A_i)\} && (10)\\
&= \{x \in U \mid \forall i \in I : x \notin A_i\} && (11)\\
&= \{x \in U \mid \forall i \in I : x \in \overline{A_i}\} && (12)\\
&= \{x \in U \mid x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}\} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} && (13)
\end{aligned}
$$

Üblicherweise sind diese Beweise ähnlich zu den Beweisen in denen man direkt ein Element nimmt und sich dann an einer Reihe logischer Äquivalenzen/Implikationen entlanghangelt. Es gibt aber durchaus Situationen in denen diese Schreibweise von Vorteil ist.

Mit diesen Methoden sollte man die weiteren Teilaufgaben gut lösen können. Wenn man an einer Aufgabe gerade festhängt, dann ist es oft hilfreich, es mit einer der anderen Methoden zu probieren. Natürlich ist es auch oft hilfreich, sich Bilder zu malen oder einfach eine Pause zu machen und es am nächsten Tag nochmal zu probieren.

Aufgabe 2
Seien $X \neq \emptyset, Y$ Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to X$ Abbildungen. Wir sagen g ist eine Linksinverse von f, falls $g \circ f = \mathbb{1}_X$ gilt und sagen g ist eine Rechtsinverse von f, falls $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ gilt. Zeige:

1. f ist genau dann injektiv, wenn f eine linksinverse Abbildung besitzt.

2. f ist genau dann surjektiv, wenn f eine rechtsinverse Abbildung besitzt.

Lösung:
In dieser Aufgabe sollen wir jeweils zeigen, dass f eine links-/rechtsinverse Abbildung besitzt, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Möchte man die Existenz einer Abbildung (oder eines Objektes allgemein) zeigen, so kann man diesen Beweis konstruktiv oder nicht konstruktiv führen. Konstruktiv würde bedeuten, dass wir diese Abbildung direkt konstruieren - entweder wir geben eine Methode an, diese Abbildung zu konstruieren oder wir geben eine Funktion $g : Y \to X$ explizit an, indem wir jedem Element aus Y einen Funktionswert in X zuweisen. Beweise dieser Art sind häufig anschaulicher[1] aber in vielen Fällen deutlich schwieriger zu führen. In einem nicht-konstruktiven Beweis zeigen wir lediglich, dass ein solches Objekt existiert, geben aber keine Möglichkeit an, dieses Objekt zu konstruieren. Beweise dieser Art kriegt man zum Beispiel durch Widerspruch: Wenn wir zeigen können, dass aus der Nichtexistenz eines Objektes Q die Nichtexistenz eines Objektes P folgt, wir aber wissen, dass P existiert (beispielsweise durch einen anderen Beweis), so können wir schließen, dass auch Q existiert ohne je etwas explizites über Q gesagt zu haben.

1. Wir werden diese Aufgabe in zwei Schritten lösen. Da wir eine Äquivalenz zeigen wollen, genügt es, zwei Implikationen zu zeigen. Also:

   "$\Rightarrow$" Sei f eine injektive Abbildung, es gilt also $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Wir konstruieren nun explizit eine linksinverse Abbildung $g : Y \to X$. Sei $y \in Y$, dann gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$ oder kein x wird auf y abgebildet. Im ersten Fall wissen wir, dass das x eindeutig ist, da f injektiv ist. Wir können also $g(y) = x$ eindeutig definieren. Im zweiten Fall können wir ein beliebiges $x \in X$ wählen und darauf abbilden. Da X eine nichtleere Menge ist, wissen wir, dass so ein x existiert.[2] Wir überprüfen nun, ob unsere Abbildung auch linksinvers ist:

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x \tag{14}$$

   Wir sehen, dass die Komposition $g \circ f$ jedes Element aus X wieder auf sich selbst abbildet.

   "$\Leftarrow$" Wir nehmen an, dass es zu f eine linksinverse Abbildung $g : Y \to X$ gibt. Da wir zeigen wollen, dass f injektiv ist, nehmen wir nun an, dass es $x, x' \in X$ gibt, sodass $f(x) = f(x')$. Wir rechnen:

   $$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x' \tag{15}$$

   wobei wir zweimal verwendet haben, dass $g \circ f$ die Identität ist.

2. Auch hier zeigen wir die Aussage in zwei Implikationen:

[1] Es gibt auch Mathematiker die dafür argumentieren, dass diese Beweise besser sind (und Mathematiker, die dafür argumentieren, dass sie nicht besser sind.)

[2] Es ist hier also wichtig, dass X nichtleer ist. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung $g : Y \to X$ eine linkstotale Relation ist - es muss also *jedem* Element aus Y ein Element aus X zugeordnet werden. Da die leere Menge keine Elemente hat, kann es keine Abbildung von einer nichtleeren in die leere Menge geben. Es gibt allerdings eine (eindeutige) Abbildung von der leeren Menge in die leere Menge. Wie sieht diese aus?

"$\Rightarrow$" Sei f surjektiv. Das heißt für jedes $y \in Y$ existiert mindestens ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$ gilt. Wir wollen nun eine Abbildung $g : Y \to X$ konstruieren, sodass jedes y auf eines dieser $x \in f^{-1}[\{y\}]$ abgebildet wird. Die Schwierigkeit liegt nun darin, dass es unendlich viele $y \in Y$ geben kann und wir für jedes dieser Elemente ein Element aus $f^{-1}[\{y\}]$ auswählen müssen. Dafür benötigen wir eine sogenannte Auswahlfunktion - die Existenz dieser Auswahlfunktion wird jedoch nur durch das Auswahlaxiom garantiert. Zur Erinnerung: Die Mathematik, wie wir sie hier betreiben, beruht auf einer Reihe von verschiedenen Axiomen, unter anderem den Axiomen der Mengenlehre, die genau beschreibt, welche Eigenschaften Mengen haben und welche Mengen existieren (oder nicht existieren) können. Es gibt eine Reihe verschiedener Axiomatiken, die verbreitetste ist allerdings die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre (abgekürzt als *ZF*). Eine Eigenart dieser Mengenlehre ist jedoch, dass sie es nicht erlaubt, aus einer unendlichen Menge von Mengen jeweils ein Element auszuwählen. Um dies zu erlauben benötigt man noch das Auswahlaxiom, das genau die Existenz einer solchen Funktion garantiert. Es gibt also auch die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre mit Auswahlaxiom (abgekürzt als *ZFC*, das C steht für "choice"). Von der großen Mehrheit der Mathematiker wird das Auswahlaxiom akzeptiert, da es intuitiv ist und erlaubt, viele intuitive Aussagen zu zeigen. Andererseits wird die Gültigkeit des Auswahlaxioms auch angezweifelt, da daraus auch viele Aussagen folgen, die unintuitiv wirken, beispielsweise das Banach-Tarski-Paradoxon. Wer sich hier für die Details interessiert, der kann sich mit Logik und axiomatischer Mengenlehre beschäftigen.
Nun zurück zum Beweis: Da wir annehmen, dass das Auswahlaxiom gilt, nehmen wir auch an, dass wir für jedes $y \in Y$ ein solches $x \in f^{-1}[\{y\}]$ auswählen können, sodass $g(y) = x$ gilt. Dann gilt offenbar

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y \tag{16}$$

also ist $f \circ g$ die Identität auf Y, das heißt es existiert eine rechtsinverse Abbildung g.

"$\Leftarrow$" Angenommen es gibt eine rechtsinverse Abbildung $g : Y \to X$. Dann gilt für jedes $y \in Y$

$$y = f(g(y)) \tag{17}$$

also ist $g(y) \in f^{-1}[\{y\}]$, also wird auf jedes Element mindestens einmal abgebildet. f ist also surjektiv.

Aufgabe 3

Sei X eine beliebige Menge. Finde eine Bijektion zwischen der Menge aller Teilmengen von X und der Menge aller Abbildungen von X in die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Anders gesagt, finde eine bijektive Abbildung

$$f : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Abb}(X, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \tag{18}$$

Lösung:

Wir definieren zuerst die charakteristische Funktion. Sei X eine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann definieren wir die charakteristische Funktion von A als

$$\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\} \tag{19}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} \tag{20}$$

Da $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ in Bijektion zu $\{0,1\}$ steht, genügt es also, eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(X)$ und $\mathsf{Abb}(X,\{0,1\})$ zu finden. Wir behaupten, dass

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathsf{Abb}(X,\{0,1\}) \tag{21}$$
$$A \mapsto \mathbb{1}_A \tag{22}$$

diese Eigenschaft erfüllt. Um Bijektivität zu zeigen, reicht es aus die Existenz einer inversen Abbildung zu zeigen. Die Inverse Abbildung ist

$$\psi : \mathsf{Abb}(X,\{0,1\}) \to \mathcal{P}(X) \tag{23}$$
$$f(x) \mapsto \{x \in X : f(x) = 1\} \tag{24}$$

Wir überprüfen nun für eine beliebige Menge $A \subseteq X$:

$$(\psi \circ \varphi)(A) = \psi(\varphi(A)) = \psi(\mathbb{1}_A) = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) = 1\} = A \tag{25}$$

und umgekehrt gilt für eine Abbildung $f(x) \in \mathsf{Abb}(X,\{0,1\})$:

$$(\varphi \circ \psi)(f)(x) = \varphi(\{y \in X \mid f(y) = 1\})(x) = \mathbb{1}_{\{y \in X \mid f(y)=1\}}(x) = f(x) \tag{26}$$

wobei letztere Gleichheit gilt, da f als mögliche Funktionswerte nur 0 und 1 zulässt.

Aufgabe 4

Sei n eine nichtnegative, ganze Zahl. Zeige, dass die größte natürliche Zahl, die kleiner als $\left(\sqrt{3}+2\right)^n$ ist, ungerade ist. Oder anders gesagt, beweise:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : 2 \nmid \lfloor \left(\sqrt{3}+2\right)^n \rfloor \tag{27}$$

Lösung:

Wir nehmen eine Fallunterscheidung nach $n \in \mathbb{N}$ vor.

$n = 0$ In diesem Fall gilt $(2+\sqrt{3})^n = (2+\sqrt{3})^0 = 1$ und 1 ist offenbar ungerade.

$n = 1$ In diesem Fall gilt $(2+\sqrt{3})^n = 2+\sqrt{3} \simeq 3,73$, die größte, kleinere natürliche Zahl ist also 3 und damit offenbar ungerade.

$n \geq 2$ Wir verwenden hier die binomische Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{(n-j)} b^j \tag{28}$$

Wir sehen direkt, dass $2-\sqrt{3} < 1$ gilt, also auch $(2-\sqrt{3})^n < 1$ für jedes $n > 1$. Da $2-\sqrt{3}$ positiv ist, ist auch die Potenz positiv. Wir berechnen nun für ein beliebiges $n \geq 2$

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j}\sqrt{3}^j + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-\sqrt{3})^k \tag{29}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j}\sqrt{3}^j + 2^{n-j}(-\sqrt{3})^j \tag{30}$$

Wir betrachten nun die einzelnen Summanden: Angenommen j ist gerade, dann gilt $\sqrt{3}^j = (-\sqrt{3})^j = 3^{j/2}$. Der Summand ist also $2^{n-j+1}3^{3/2}$, also gerade. Angenommen j ist ungerade, dann gilt $(-\sqrt{3})^j = -\sqrt{3}^j$, der vordere und hintere Summand heben sich also gegenseitig auf. Insgesamt ist $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ also eine gerade, natürliche Zahl. Da uns allerdings nur $(2+\sqrt{3})$ interessiert, ziehen wir den zweiten Summanden noch ab. Wir wir oben gezeigt haben, liegt er zwischen 0 und 1, also ist die nächstkleinere, natürliche Zahl, die noch übrig bleibt, eine ungerade Zahl.

Aufgabe 5
Seien A, B, C nichtleere Mengen. Zeige, dass es eine Bijektion zwischen der Menge aller Abbildungen von $A \times B$ nach C und der Menge aller Abbildungen von A in die Abbildungen von B nach C gibt. Anders gesagt, finde eine bijektive Abbildung

$$f : \mathsf{Abb}(A \times B, C) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Abb}(A, \mathsf{Abb}(B, C)) \tag{31}$$

Lösung:
Da C nichtleer ist, gibt es ein $c_0 \in C$. Insbesondere gibt es also eine Abbildung

$$f : B \to C \tag{32}$$
$$b \mapsto c_0 \tag{33}$$

also ist die Menge $\mathsf{Abb}(B, C)$ nichtleer. Wir definieren nun die Abbildungen

$$\varphi : \mathsf{Abb}(A \times B, C) \to \mathsf{Abb}(A, \mathsf{Abb}(B, C)) \tag{34}$$
$$f \mapsto \begin{pmatrix} A \to \mathsf{Abb}(B, C) \\ a \mapsto \begin{pmatrix} B \mapsto C \\ b \mapsto f(a, b) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{35}$$

und

$$\psi : \mathsf{Abb}(A, \mathsf{Abb}(B, C)) \to \mathsf{Abb}(A \times B, C) \tag{36}$$
$$f \mapsto \begin{pmatrix} A \times B \to C \\ (a, b) \mapsto f(a)(b) \end{pmatrix} \tag{37}$$

Wir behaupten, dass diese beiden Abbildungen zueinander invers sind. Um das zu zeigen: Sei $f \in \mathsf{Abb}(A, \mathsf{Abb}(B, C))$. Wenn wir zeigen wollen, dass $(\varphi \circ \psi)$ die Identität ist, dann muss f also wieder auf f abgebildet werden. Um zu prüfen ob f auf sich selbst abgebildet wird, prüfen wir ob die Abbildung $(\varphi \circ \psi)(f)$ jedes $a \in A$ auf die gleiche Art und Weise abbildet, wie f selbst. Da f dieses a auf eine Abbildung von B nach C abbildet, muss überprüft werden, ob die beiden Abbildungen gleich sind. Auch diese Gleichheit überprüfen wir, indem wir testen, ob ein $b \in B$ auf das gleiche Element in C abgebildet wird. Dies wird allerdings durch einfaches Einsetzen schnell gezeigt. Umgekehrt müssen wir für eine Abbildung $g : A \times B \to C$ zeigen, dass ein Tupel $(a, b) \in A \times B$ von g und $(\psi \circ \varphi)(g)$ auf die gleiche Art und Weise nach C abgebildet wird.