

Lineare Algebra I

Lösungsskizzen zum Tutoriumsblatt 2

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben, die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Die ersten Lösungen sind noch sehr umfangreich, da ich versuchen werde ein bisschen mathematische Denkweise zu erläutern. Diese sollte man möglichst schnell verinnerlichen - die Detailliertheit dieser Lösungen wird schnell abnehmen und sich bald auf die konkreten Beweisschritte beschränken.

Aufgabe 1

Seien A, B beliebige Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

1. Sei f injektiv. Zeige, dass f eine Bijektion zwischen A und $f(A)$ definiert.
2. Sei $C \subseteq B$ eine Teilmenge. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
 - (a) $f^{-1}[C] = A$
 - (b) $f(A) \subseteq C$

Lösung:

1. Bevor wir die Aufgabe selbst lösen, erinnern wir uns an die Definition von Injektivität und Surjektivität, sowie Bijektivität. Im Mathestudium trifft man häufig auf neue Definitionen, bzw. soll Konzepte aus der Vorlesung in Aufgaben anwenden. Mir persönlich hilft es hier oft weiter, wenn ich zu Anfang der Aufgabe erstmal alle Definitionen und Sätze, die mir nicht zu 100 Prozent klar sind, aufschreibe. Also ganz allgemein:

- Seien X, Y Mengen und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann heißt φ *injektiv*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (1)$$

gilt.

Anschaulich also: Jedes Element in Y kann unter f von höchstens einem Element in X getroffen werden. Hier wird keine Aussage darüber gemacht, wie viele Elemente in Y überhaupt getroffen werden.

- Seien X, Y Mengen und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann heißt φ *surjektiv*, falls

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y \quad (2)$$

gilt.

Jedes Element in Y wird also unter f von mindestens einem Element in X getroffen. Wir können das auch anders formulieren - erinnern wir uns an die Definition der Bildmenge einer Abbildung:

$$\text{im}(\varphi) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \quad (3)$$

Vergleichen wir die Definition der Bildmenge und die Definition von Surjektivität, stellen wir fest, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn $\text{im}(\varphi) = Y$ gilt.

- Seien X, Y Mengen und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann heißt φ *bijektiv*, falls

$$\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y \quad (4)$$

gilt, wobei $\exists!$ bedeutet, dass es *genau ein Element* x gibt, sodass die darauffolgende Aussage gilt.

Jedes Element in Y wird unter f also von genau einem Element in X getroffen. Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Ein Vorteil des Aufschreibens von Definitionen und Sätzen ist, dass einem häufig bereits hier auffällt, wenn man etwas nicht verstanden hat. Wem beispielsweise unklar ist, wieso die Folgerungen nach Surjektivität und Bijektivität gelten, der sollte vor dem Lösen der Aufgabe noch einmal darüber nachdenken und versuchen das zu zeigen. Der Beweis der Aufgabe geht nun wie folgt:

Sei f injektiv. Wir betrachten nun die Abbildung

$$f' : A \rightarrow f(A) \quad (5)$$

$$x \mapsto f(x) \quad (6)$$

also die gleiche Abbildung, nur mit einer anderen Zielmenge. Wir wollen zeigen, dass f' bijektiv ist, denn dann definiert f eine bijektive Abbildung, also reicht es Injektivität und Surjektivität zu zeigen, wobei erstere aufgrund unserer Annahme gilt. Also müssen wir nur Surjektivität zeigen. Sei $y \in f(A)$. Wir erinnern uns, dass

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\} \quad (7)$$

Also existiert für unser $y \in Y$ ein $x \in A$, sodass $f(x) = y$ gilt. Da $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in A$ gilt, gilt damit auch $f'(x) = y$. Damit ist die Abbildung f' surjektiv. Insgesamt ist die Abbildung also bijektiv, was zu zeigen war.

Das ist wieder eine etwas langwierige Lösung. Die Einführung einer neuen Abbildung f' ist eigentlich nicht nötig, wir sagen einfach, dass f bijektiv auf seinem Bild ist. Mit der Charakterisierung von Surjektivität (f surjektiv, genau dann, wenn $\text{im}(f) = B$ gilt), können wir das ganze nochmal kürzer schreiben:

Sei f injektiv. Um Bijektivität zu zeigen, müssen wir also nur noch zeigen, dass f surjektiv ist. Da f genau surjektiv ist, wenn $\text{im}(f) = B$ gilt, können wir Surjektivität erreichen, indem wir statt B nun $f(A)$ wählen. Also ist $f : A \rightarrow f(A)$ surjektiv und damit auch bijektiv.

2. Wir erinnern uns hier an die folgenden beiden Konzepte:

- Seien X, Y Mengen und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Eine Abbildung $\psi : Y \rightarrow X$ ist die zu φ *inverse Abbildung* bzw. die *Umkehrabbildung von φ* , wenn folgende beiden

Gleichungen gelten

$$\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_Y \Leftrightarrow \forall y \in Y : \varphi(\psi(y)) = y \quad (8)$$

$$\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_X \Leftrightarrow \forall x \in X : \psi(\varphi(x)) = x \quad (9)$$

In diesem Fall schreiben wir auch $\psi = \varphi^{-1}$

Die zu φ inverse Abbildung existiert nur dann, wenn φ bijektiv ist und eine Abbildung ψ ist genau dann eine inverse Abbildung, wenn sie links- und rechtsinvers zu φ ist (siehe Tutoriumsblatt 1). Ist ψ die inverse Abbildung zu φ , dann ist φ gleichzeitig auch die inverse Abbildung zu ψ .

- Seien X, Y Mengen und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei $W \subseteq Y$ eine Teilmenge, dann definieren wir das *Urbild von W unter φ* als

$$\varphi^{-1}[W] = \{x \in X \mid \varphi(x) \in W\} \quad (10)$$

Anschaulich gesagt: Das Urbild von W sind alle Elemente aus X die unter f auf ein Element in W abgebildet werden. Die Existenz des Urbildes setzt keine weiteren Eigenschaften an φ voraus. Die häufigere Schreibweise ist hierbei $\varphi^{-1}(W)$ statt $\varphi^{-1}[W]$, es gibt teilweise auch die Schreibweise $\varphi^{-1}\{W\}$, die ich glaube aber recht selten.

Gut, hier sehen wir gleich eine Quelle für Verwirrung. Urbild und Umkehrfunktion haben die gleiche Schreibweise, bedeuten aber unterschiedliche Dinge. Um eine klarere Schreibweise zu haben, kann man das Urbild mit eckigen (oder geschweiften) Klammern schreiben und nur die Umkehrfunktion mit runden Klammern. Es gibt noch ein paar weitere Punkte, die hilfreich sind: Während das Urbild immer existiert, existiert die inverse Abbildung nur, wenn φ bijektiv ist. Betrachtet man also eine Abbildung die nicht bijektiv ist und schreibt $\varphi^{-1}(\cdot)$, dann kann nur das Urbild gemeint sein. Wir können natürlich auch in die Umkehrfunktion eine Menge einsetzen. Angenommen φ^{-1} existiert und sei $W \subseteq Y$, dann gilt:

$$\varphi^{-1}(W) = \{\varphi^{-1}(y) \in X \mid y \in W\} \quad (11)$$

Praktischerweise gilt in diesem Fall $\varphi^{-1}(W) = \varphi^{-1}[W]$, also braucht man gar nicht mehr so aufpassen.¹ Nun zum Beweis an sich: Da wir eine Äquivalenz zeigen sollen, werden wir zwei Implikationen zeigen. Einmal von links nach rechts (“ \Rightarrow ”) und einmal von rechts nach links (“ \Leftarrow ”).

“ \Rightarrow ” Wir nehmen an, dass $f^{-1}[C] = A$ gilt. Das Urbild von C unter f ist also A . Insbesondere gilt dann für $x \in A$, dass es im Urbild von C liegt, also

$$x \in A \Rightarrow x \in \{x \in A \mid f(x) \in C\} \quad (12)$$

also gilt auf jeden Fall auch $f(x) \in C$. Da aber $f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$ gilt, folgt damit schon für jedes $f(x) \in f(A)$, dass es in C liegt und wir haben die Implikation gezeigt.

¹Auch hier: Wem nicht klar ist, wieso das gilt, der sollte sich nun mit Stift und Papier (bzw. Stift und Tablet) hinsetzen und das beweisen

“ \Leftarrow ” Sei $f(A) \subseteq C$. Wir sollen die Gleichheit von zwei Mengen zeigen, also unterteilen wir diesen Beweis in zwei Inklusionen. Es ist jedoch klar, dass $f^{-1}[C] \subseteq A$ gilt. Denn A ist die Definitionsmenge von f . Ein Element das nicht in A liegt, kann also auch in keinem Urbild liegen. Zu zeigen bleibt nur noch die andere Inklusion $A \subseteq f^{-1}[C]$. Wir sehen:

$$x \in A \stackrel{f(A) \subseteq C}{\Rightarrow} f(x) \in C \Rightarrow x \in f^{-1}[C] \quad (13)$$

also gilt auch diese Inklusion.

In diesem Fall ist die Unterscheidung zwischen Umkehrfunktion und Urbild wichtig, ansonsten wären wir versucht folgenden Beweis zu führen:

Angenommen $f(A) \subseteq C$. Es gilt auf jeden Fall $f^{-1}[C] \subseteq A$, also bleibt nur die Rückrichtung. Dazu wenden wir auf beide Seiten unserer Annahme die Abbildung f^{-1} an, also

$$f^{-1} \circ f(A) \subseteq f^{-1}[C] \Rightarrow A \subseteq f^{-1}[C] \quad (14)$$

wobei wir verwenden, dass $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_A$ gilt, da es die Umkehrfunktion ist.

Allerdings ist dieser Beweis falsch, da f^{-1} eben nicht die inverse Abbildung, sondern das Urbild ist. Wir haben auch nirgendwo die Annahme getätigt, dass f bijektiv ist, also können wir auch nicht davon ausgehen, dass die inverse Abbildung existiert.

Aufgabe 2

Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B$, sowie $g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Zeige:

1. Seien f, g injektiv (bzw. surjektiv). Zeige, dass die Komposition $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.
2. Sei die Komposition $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv). Zeige, dass f injektiv (bzw. g surjektiv) ist.

Lösung:

1. Die Lösungen hier sind einfach durch Einsetzen der Definitionen zu lösen:

Seien f, g injektiv, dann gilt per Definition

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (15)$$

$$\forall y_1, y_2 \in B : g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \quad (16)$$

Um zu zeigen, dass $g \circ f$ injektiv ist, nehmen wir an, dass für $x_1, x_2 \in A$ gilt, dass $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ gilt und wollen zeigen, dass $x_1 = x_2$ folgt. Aus $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ folgt mit der Injektivität von g , dass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt und daraus folgt mit der Injektivität von f , dass $x_1 = x_2$ gilt. Die Komposition ist also injektiv.

Man beachte, dass man nicht direkt mit der Injektivität von f folgern kann, dass $x_1 = x_2$ gilt. Wäre g nicht injektiv, so könnte $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ gelten, ohne dass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt.

Seien f, g surjektiv, dann gilt per Definition:

$$\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y \quad (17)$$

$$\forall z \in C : \exists y \in B : g(y) = z \quad (18)$$

Um zu zeigen, dass $g \circ f$ surjektiv ist, wählen wir ein beliebiges $z \in C$ und müssen ein $x \in A$ finden, das darauf abgebildet wird. Da $z \in C$ liegt, gilt mit der Surjektivität von g , dass es ein $y \in B$ gibt, sodass $g(y) = z$. Und aufgrund der Surjektivität von f gibt es ein $x \in A$, sodass $f(x) = y$. Insgesamt gilt also

$$g(f(x)) = g(y) = z \quad (19)$$

und unsere Abbildung ist surjektiv.

Die Folgerung aus diesen Aussagen ist natürlich: Sind f, g bijektiv, so ist die Komposition $g \circ f$ bijektiv.

2. Auch hier sind die Beweise sehr direkt:

Sei $g \circ f$ injektiv. Wir wollen zeigen, dass f injektiv ist. Also seien $x_1, x_2 \in A$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt daraus bereits $x_1 = x_2$ also ist f injektiv.

und

Sei $g \circ f$ surjektiv. Es existiert also für jedes $z \in C$ ein $x \in A$, sodass $g(f(x)) = z$ gilt. Um zu zeigen, dass g surjektiv ist, sei $z \in C$ beliebig gegeben. Dann existiert $x \in A$, sodass $g(f(x)) = z$ gilt. Dann sehen wir aber bereits, dass $f(x) \in B$ ein geeignetes Urbild für z unter g ist. g ist also surjektiv.

Man beachte, dass die Folgerung, dass g injektiv (bzw. f surjektiv) ist, im Allgemeinen nicht gültig ist. Auch aus $g \circ f$ bijektiv, kann man nur f injektiv und g surjektiv folgern.

Aufgabe 3

Sei X eine Menge. Dann ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine *Partition* von X , wenn X von ihnen überdeckt wird und sie paarweise disjunkt sind. Es gilt also:

$$U = \bigcup_{p \in \rho} p \quad (20)$$

$$\forall q, p \in \rho : p \neq q \Rightarrow p \cap q = \emptyset \quad (21)$$

Sind ρ, ρ' zwei Partitionen von X , so ist der Schnitt $\rho \cap \rho'$ die Menge aller nichtleeren Elemente die durch den Schnitt eines Elements aus ρ mit einem Element aus ρ' entstehen. In Formeln:

$$\rho \cap \rho' = \{\omega \in \mathcal{P}(X) \mid \omega \neq \emptyset \wedge \exists p \in \rho, p' \in \rho' : \omega = p \cap p'\} \quad (22)$$

Zeige: Der Schnitt zweier Partitionen ist eine Partition.

Lösung:

Zur Erinnerung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X . Man beachte auch die Wortwahl in der Definition eben: Ist $p \in \rho$, dann ist p ein Element von ρ und gleichzeitig eine Teilmenge von X . p ist also gleichzeitig Element und Menge. Das ist aber weder ein Widerspruch, noch liegt dem eine tiefere mathematische Bedeutung inne. In der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre gibt es keine Unterscheidung zwischen Objekten und Mengen, sondern alles ist eine Menge², eine Unterscheidung ist also rein sprachlicher Natur und dient nur dazu, zu verdeutlichen, welchem Zweck das Objekt in diesem Moment dient. Sprechen wir also von $p \in \rho$ als Element, so wollen wir klarstellen, dass wir es nun als ein Element der Partition betrachten und im Moment die Eigenschaften als Element der Partition im Vordergrund stehen. Analog sprechen wir von $p \subseteq X$ als einer Menge, wenn wir verdeutlichen wollen, dass es eine Menge ist und genau die Eigenschaft Elemente von X zu enthalten, im Vordergrund steht. Natürlich hat es zu jedem Zeitpunkt noch die entsprechenden anderen Eigenschaften. Nun zum Beweis selbst:

Wenn wir zeigen wollen, dass $\rho \cap \rho'$ eine Partition ist, müssen wir zeigen, dass es alle Eigenschaften einer Partition erfüllt. Wir überlegen also:

1. Eine Partition von X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X . In der obigen Definition des Schnitts zweier Partitionen $\rho \cap \rho' = \{\omega \in \mathcal{P}(X)[\dots]\}$ steht bereits, dass jedes Element des Schnitts ein Element von $\mathcal{P}(X)$ ist. Also gilt $\rho \cap \rho' \subseteq \mathcal{P}(X)$ per Definition.
2. Wir müssen zeigen, dass X von den Elementen der Partition überdeckt wird. Dazu reicht es zu zeigen, dass wir für jedes Element $x \in X$ ein Element in $\rho \cap \rho'$ finden, das x enthält. Sei also $x \in X$. Da ρ eine Partition ist gibt es $p \in \rho$, sodass $x \in p$. Gleichzeitig ist auch ρ' eine Partition, also gibt es $p' \in \rho'$, sodass $x \in p'$. Natürlich gilt dann auch $x \in p \cap p'$. Die Menge $p \cap p'$ ist auch Element von $\rho \cap \rho'$ (sie ist nichtleer, da sie auf jeden Fall x enthält).
3. Wir müssen zeigen, dass alle Elemente des Schnitts paarweise disjunkt sind. Seien also $\omega, \omega' \in \rho \cap \rho'$, dann gibt es $p, q \in \rho$ und $p', q' \in \rho'$, sodass $\omega = p \cap p'$ und $\omega' = q \cap q'$. Man beachte hier, dass ω und ω' wiederum auch Teilmengen von X sind. Wir haben bisher nichts weiter über die Eigenschaften und Verhältnisse der Mengen p, q, p', q' gesagt, also müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen:

$p = q, p' = q'$ In diesem Fall gilt $\omega = \omega'$, also müssen wir ihn für die Implikation $\omega \neq \omega' \Rightarrow \omega \cap \omega' = \emptyset$ nicht betrachten (Ist das Antezedens falsch, so ist die Implikation immer wahr).

$p = q, p' \neq q'$ Da ρ' eine Partition ist, folgt aus $p' \neq q'$ direkt, dass $p' \cap q' = \emptyset$ gelten muss. Daraus folgt auch, dass

$$\omega \cap \omega' = p \cap q \cap p' \cap q' = p \cap q \cap \emptyset = \emptyset \quad (23)$$

gilt. Die Aussage ist also auch hier wahr.

²Das ist nicht ganz präzise, reicht für unsere Zwecke aber aus. Genauer wäre es zu sagen: In ZF(C) beschäftigt man sich mit Objekten, die Mengen sind und lässt alle anderen Objekte außen vor. Beispielsweise gibt es neben Mengen noch Klassen - in ZF(C) wird allerdings nur gesagt, dass diese keine Mengen sind und die Theorie sich deswegen nicht mit ihnen beschäftigt (Klassen sind in gewisser Weise wie Mengen, sie sind allerdings "zu groß" um Mengen zu sein). Will man sich präzise mit Klassen beschäftigen, so bräuchte man eine andere Mengenlehre, zum Beispiel die Neumann-Gödel-Bernay Mengenlehre oder der Morse-Kelley Mengenlehre. Die ganze Thematik geht allerdings über das hinaus, was wir hier brauchen und ist üblicherweise nur relevant, wenn man sich explizit mit diesen Themen auseinandersetzt.

$p \neq q, p' = q'$ Da der vorherige Beweis symmetrisch unter Vertauschung von $p \leftrightarrow p'$ und $q \leftrightarrow q'$ ist, können wir ihn analog durchführen.

$p \neq q, p' \neq q'$ Auch hier können wir genau die gleichen Schritte wie vorher durchführen.

Da $\rho \cap \rho'$ alle Eigenschaften einer Partition erfüllt, ist es auch eine Partition und wir sind fertig.

Aufgabe 4

Seien A, B endliche Mengen. Zeige

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (24)$$

Lösung:

Hier gibt es prinzipiell zwei mögliche Beweise:

Da A und B endlich sind, können wir die Elemente nummerieren und schreiben

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad (25)$$

$$B = \{b_1, \dots, b_m\} \quad (26)$$

wir ordnen die Elemente dabei so an, dass alle Elemente aus B , die auch in A enthalten sind, die höchsten Indizes in B tragen.^a Es gibt also ein $0 \leq k \leq m$, sodass $\forall j \leq k : b_j \notin A$ und $\forall k < j : b_j \in A$ gilt, wobei $1 \leq j \leq n$ gilt. Hierbei sind natürlich auch die Möglichkeiten $A \cap B = \emptyset$, bzw. $B \subseteq A$ durch $k = n$, bzw. $k = 0$ vertreten. b_k ist also immer das "letzte" Element, das nicht in A liegt. Unter dieser Vereinbarung gilt nun offenbar

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\} \quad (27)$$

$$A \cap B = \{b_{k+1}, \dots, b_m\} \quad (28)$$

und wir können berechnen:

$$|A \cup B| = n + k \quad (29)$$

und

$$|A| + |B| - |A \cap B| = n + m - (m - k) \quad (30)$$

diese beiden Zahlen sind offenbar gleich, also haben wir die Aussage bewiesen.

^aWir erinnern uns, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Insbesondere sind Mengen nicht geordnet, also ist die Reihenfolge der Elemente irrelevant, zum Beispiel gilt $\{A, B\} = \{B, A\}$. Gleichzeitig können wir natürlich jedem Element immer einen neuen Namen geben, ohne dass es sich verändert. Zusammen erlaubt uns das, die Elemente einer Menge so anzuordnen, wie es für uns gerade am geeignetsten ist.

In diesem Beweis haben wir zur Vereinfachung der Notation verwendet, dass folgendes gilt:

$$j < i \Rightarrow \{b_i, \dots, b_j\} = \emptyset \quad (31)$$

Vereinbarungen dieser Art gibt es häufig, meistens werden sie nicht explizit erwähnt. Sie sind allerdings meist logisch, bzw. einfach aus dem Kontext erkennbar. Der zweite Beweis basiert nicht auf dem Durchnummerieren von Elementen.

Wir verwenden hier die folgende Aussage für zwei endliche Mengen X, Y ^a

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow |X \cup Y| = |X| + |Y| \quad (32)$$

Wir wollen unsere obrige Gleichung also in eine Gleichung mit disjunkten Mengen übersetzen. Es gilt:

$$A = (A \cap B) \dot{\cup} (A \setminus B) \quad (33)$$

$$A \cup B = B \dot{\cup} (A \setminus B) \quad (34)$$

wobei $\dot{\cup}$ (häufig auch als \amalg geschrieben) eine disjunkte Vereinigung bezeichnet. Wenden wir die erste Gleichung des Beweises an, so gilt damit auch

$$|A| = |A \cap B| + |A \setminus B| \quad (35)$$

$$|A \cup B| = |B| + |A \setminus B| \quad (36)$$

und damit gilt, wenn wir die erste Gleichung von der zweiten abziehen:

$$|A \cup B| - |A| = |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (37)$$

womit wir die zu zeigende Aussage gezeigt haben.

^aAuch hier gilt: Wem nicht klar ist, wieso das gilt, der sollte es nicht hinnehmen, sondern versuchen es zu beweisen. Die erste Beweisvariante kann hier helfen.

Man beachte, dass die beiden obigen Beweise nicht funktionieren, wenn die Mengen unendlich sind. Der erste Beweis scheitert für überabzählbar unendliche Mengen sofort, da man diese nicht durchnummerieren kann. In abzählbar unendlichen Mengen gibt es zwar bestimmte Umstände (nämlich $B \setminus A$ endlich), unter denen man diese Anordnung und Durchnummerierung durchführen könnte, stößt dann aber auf das Problem, dass man $\infty - \infty$ rechnen müsste, das ist aber nicht definiert. Der zweite Beweis scheitert ebenfalls daran, dass $\infty - \infty$ nicht sinnvoll zu definieren ist.