Lineare Algebra I
Lösungsskizzen zum Tutoriumsblatt 3

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben, die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Da ich diese Woche krank war und meine Tutorien nicht gehalten habe, sind die Ausführungen hier ein bisschen... ausführlich. Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden und den Rest ignorieren.

Aufgabe 1

Sei X eine Menge, sei $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition und

$$R_\rho = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists Y \in \rho : x,y \in Y\} \subseteq X \times X \tag{1}$$

die von ρ erzeugte Äquivalenzrelation. Zeige, dass $\rho \mapsto R_\rho$ eine Bijektion zwischen der Menge der Partitionen von X und der Menge der Äquivalenzrelationen auf X definiert.

Lösung:

Wir erinnern uns zuerst an die notwendigen Definitionen (Die Definition einer Partition gibt es im zweiten Tutoriumsblatt):

Seien X, Y Mengen, dann definieren wir eine *(binäre) Relation* R als eine Teilmenge

$$R \subseteq X \times Y \tag{2}$$

und sagen zwei Elemente $x \in X, y \in Y$ stehen in Relation R zueinander, falls $(x,y) \in R$. Wir schreiben in diesem Fall xRy - es gibt auch die Schreibweisen Rxy oder xyR, aber die sind seltener.

Prinzipiell ist eine Relation also nur eine Teilmenge des kartesischen Produkts. Beispielsweise ist die "kleiner gleich" Relation "$\leq$" auf den reellen Zahlen eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in der genau alle Paare $(s,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ enthalten sind, sodass $s \leq r$. Neben binären, also zweistelligen Relationen gibt es auch noch beliebige n-stellige Relationen und unendliche Relationen, in denen man nicht nur Mengen X, Y hat, sondern eine Relation eine Teilmenge $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ ist. Diese sind aber deutlich seltener und für den Anfang reicht es wohl, wenn man sich auf binäre Relationen konzentriert. Es gibt eine Reihe von Eigenschaften über Relationen, die man häufig trifft[1]:

Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation. Wir definieren:

- R heißt *linkstotal*, wenn jedes Element aus X zu mindestens einem Element von Y in Relation steht. In Formeln:
$$\forall x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in R \tag{3}$$
- R heißt *rechtseindeutig*, wenn jedes Element aus X zu höchstens einem Partner in Y in

[1] Die Liste ist umfangreicher, als man sie für diese Aufgabe braucht - da würde reichen sich reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation anzuschauen.

Relation steht. In Formeln:

$$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z \tag{4}$$

Es gibt analog noch *rechtstotal* und *linkseindeutig*. Gilt $Y = X$, ist die Relation also zwischen zweimal der gleichen Menge, so nennen wir sie *homogen*. Für homogene Relationen definieren wir:

- R heißt *reflexiv*, wenn jedes Element zu sich selbst in Relation steht. In Formeln:

$$\forall x \in X : (x, x) \in R \tag{5}$$

- R heißt *symmetrisch*, wenn sich unter Vertauschung der ersten und zweiten Einträge aller Tupel nichts ändert.

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \tag{6}$$

- R heißt *antisymmetrisch*, wenn zwei verschiedene Elemente nicht in beiden Richtungen miteinander in Relation stehen können. in Formeln:

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y \tag{7}$$

  Man beachte: Eine antisymmetrische Relation kann immer noch reflexiv sein.

- R heißt *transitiv*, wenn folgendes gilt: Steht ein erstes Element mit einem zweiten in Relation und das zweite wiederum mit einem dritten, dann folgt daraus bereits, dass das erste Element mit dem dritten in Relation steht. In Formeln:

$$\forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \tag{8}$$

- R heißt *total*, wenn zwei Elemente jeweils in mindestens einer Richtung in Relation stehen. In Formeln:

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \tag{9}$$

Wir können noch bestimmte Arten von Relationen definieren:

Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation. Dann nennen wir

- R eine *Funktion*, wenn R linkstotal und rechtseindeutig ist. Jedem Element aus X wird also genau ein Element aus Y zugeordnet. In diesem Fall schreiben wir auch $R : X \to Y$ und wenn $x \in X$ zu $y \in Y$ in Relation steht, dann schreiben wir $f(x) = y$.

- Ist $X = Y$, dann nennen wir R eine *partielle Ordnung*, wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. Ist sie zusätzlich noch total, reden wir von einer *Totalordnung*

- Ist $X = Y$, dann nennen wir R eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall definieren wir für jedes $x \in X$ die *Äquivalenzklasse von x* als

$$[x] = \overline{x} = \{y \in X \mid (x, y) \in R\} \subseteq X \tag{10}$$

  und sagen für jedes Element $\hat{x} \in [x]$, dass $\hat{x}$ ein *Vertreter* von $[x]$ ist.

Die Funktionen, wie sie hier definiert wurden, sind genau die klassischen Funktionen. Eine partielle

Ordnung wäre beispielsweise die Teilmengenrelation von Teilmengen einer Menge. Eine Totalordnung wäre dagegen die “kleiner gleich”-Relation $\leq$. Keine Totalordnung wäre dagegen “kleiner als” $<$, da diese nicht reflexiv ist. Eine (langweilige) Äquivalenzrelation wäre “ist gleich”, also $=$ (alles jeweils auf den reellen Zahlen). Wem jeweils nicht klar ist, wieso das gilt, der sollte jetzt kurz die Begriffe durchgehen und sich überlegen, wieso.
Äquivalenzrelationen sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie es uns erlauben, große Mengen, bei denen sich die Elemente durch verschiedene Parameter unterscheiden, in kleinere Mengen zusammenzufassen, bei denen uns nur bestimmte Parameter interessieren. Als Beispiel:

Angenommen wir wollen die rationalen Zahlen konstruieren - dazu betrachten wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiert durch

$$((q_1, p_1), (q_2, p_2)) \in \sim \Leftrightarrow q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1 \tag{11}$$

Sei nun $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann können wir die Äquivalenzklasse $[q, p]$ als $\frac{q}{p}$ schreiben. Dann gilt natürlich $(p, q) \in \frac{q}{p}$, aber eben auch $(2p, 2q) \in \frac{q}{p}$ und damit natürlich auch $\frac{q}{p} = \frac{2q}{2p}$. Die Brüche sind also Äquivalenzklassen und damit ist jeder Bruch (in dieser Betrachtungsweise) eine Menge. In der Praxis wird man jedoch nie von einer Menge, sondern einfach von einer rationalen Zahl sprechen. Da die Unterscheidung zwischen (p, q) und $(2p, 2q)$ in diesem Beispiel irrelevant ist, erlaubt uns die Einführung einer Äquivalenzrelation, alle Unterschiede zwischen Elementen, die uns nicht interessieren, zu ignorieren. Man muss aber bei Operationen auf Brüchen aufpassen, dass man sie korrekt auf den Äquivalenzklassen definiert, dazu gleich mehr.

Mit diesen Begriffen können wir nun den Beweis selbst führen. Da wir zeigen müssen, dass $\rho \mapsto R_\rho$ eine Bijektion ist, werden wir Injektivität und Surjektivität zeigen. Bevor wir damit beginnen, müssen wir allerdings noch die Wohldefiniertheit der Abbildung zeigen. Damit eine Abbildung wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass sie so, wie sie hingeschrieben ist, Sinn ergibt. Insbesondere müssen wir also zeigen, dass die Abbildung jedem Element aus der Definitionsmenge ein eindeutiges Element in der Zielmenge zuweist. Man kann hier also grob drei Schritte anführen.
Wir zeigen, dass die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich definiert ist. Das sieht man meistens schnell. Ein Gegenbeispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{12}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Das wäre so eine Art absoluter Betrag. Die Funktion ist allerdings nicht linkstotal, denn wir haben hier keine Abbildungsvorschrift für $x = 0 \in \mathbb{R}$ angegeben. Die Funktion ist also nicht wohldefiniert.

Als zweites zeigen wir, dass die Funktionswerte alle in der Zielmenge liegen. Ein Gegenbeispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \tag{14}$$
$$x \mapsto x^2 \tag{15}$$

in diesem Fall ist die Abbildung nicht wohldefiniert, weil es im Definitionsbereich Elemente gibt, die auf Elemente außerhalb der Zielmenge abgebildet werden. Zum Beispiel wird $0.5 \in \mathbb{R}$ auf $0.25 \notin \mathbb{N}$ abgebildet.

Als letztes müssen wir die Eindeutigkeit der Abbildungsvorschrift zeigen. Das ist üblicherweise nur dann ein Problem, wenn man es mit Äquivalenzklassen zu tun hat und man die Funktion mit einem Vertreter der Äquivalenzklasse beschreibt, kann dann aber sehr trickreich sein. Als Gegenbeispiel wieder Brüche:

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \tag{16}$$
$$\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{q^2} \tag{17}$$

Diese Abbildung ist nicht wohldefiniert, da einem Element aus dem Definitionsbereich kein eindeutiges Element aus dem Zielbereich zugeordnet wird. Beispielsweise gilt $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, also müsste die Abbildung beiden Elementen das gleiche Element aus der Zielmenge zuweisen, es gilt allerdings

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{32} = \frac{2}{64} = \frac{2}{8^2} = f\left(\frac{2}{8}\right) \tag{18}$$

also werden dem gleichen Element auf der linken Seite zwei unterschiedliche Elemente auf der rechten Seite zugewiesen und die Funktion ist nicht mehr wohldefiniert.

Nun der Beweis:

Wir wollen zuerst die Wohldefiniertheit der Abbildung prüfen. Geben wir ihr den Namen ϕ, so können wir hierfür schreiben

$$\phi : \{\text{Partitionen von } X\} \to \{\text{Äquivalenzrelationen auf } X\} \tag{19}$$
$$\rho \mapsto R_\rho \tag{20}$$

Dabei wird keine neue Information vermittelt, das dient nur der Veranschaulichung der drei vorher erwähnten Schritte. Dass jede Partition von der Abbildungsvorschrift beachtet wird ist klar, also zeigen wir als nächstes, dass für ein gegebenes $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge R_ρ eine Äquivalenzrelation definiert.

1. Sei $x \in X$. Dann gibt es, da ρ eine Partition ist, eine Menge $Y \in \rho$, sodass $x \in Y$ liegt. Damit gilt $(x, x) \in R_\rho$ und die Reflexivität ist gezeigt.

2. Seien $x, y \in X$, sodass $(x, y) \in R_\rho$. Per Definition heißt das, dass es ein $Y \in \rho$ gibt, sodass $x, y \in Y$. Dann gilt aber sofort auch $(y, x) \in R_\rho$, also ist die Relation symmetrisch.

3. Seien $x, y, z \in X$, sodass $(x, y) \in R_\rho$ und $(y, z) \in R_\rho$. Das heißt es gibt Mengen $Y, Z \in \rho$, sodass $x, y \in Y$ und $y, z \in Z$ liegen. Insbesondere liegt $y \in Y \cap Z$. Da ρ eine Partition ist, sind die

Mengen paarweise disjunkt. Also folgt aus der Nichtleerheit von $Y \cap Z$, dass $Y = Z$ ist und damit sind natürlich $x, z \in Y$, also gilt auch $(x, z) \in R_\rho$ und die Transitivität ist gezeigt.

Da die Abbildung eindeutig definiert ist und nicht auf Vertreter oder Ähnliches zurückgreift, ist auch klar, dass sie rechtseindeutig ist.
Wir zeigen als nächstes, dass jede Äquivalenzrelation von einer Partition getroffen wird. Sei $R \subseteq X \times X$ eine beliebige Äquivalenzrelation und sei X/R die Menge der Äquivalenzklasse. Für $x \in X$ ist die Äquivalenzklasse definiert als $[x] = \{y \in X \mid xRy\} \subseteq X$, also ist X/R eine Menge von Teilmengen von X. Wir behaupten, dass dies eine Partition ist, die unter ϕ genau auf R abgebildet wird.
Eine Partition ist eine Überdeckung paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen. Da jedes $x \in X$ in der Äquivalenzklasse $[x] \subseteq X$ liegt, bildet X/R auf jeden Fall eine Überdeckung und die Äquivalenzklassen sind nichtleer. Ist $x, y \in X$ und sind $[x]$ und $[y]$ die beiden entsprechenden Äquivalenzklassen, müssen wir zeigen, dass diese disjunkt oder gleich sind. Das ist aber eine grundlegende Eigenschaft von Äquivalenzklassen. Angenommen der Schnitt $[x] \cap [y]$ ist nichtleer, dann gibt es $w \in X$, sodass wRx und wRy. Dann gilt aber für jedes Element $x' \in [x]$, dass $x'Rw$ und mit Transitivität auch $x'Ry$, also liegt x' in $[y]$. Auf die gleiche Art und Weise zeigen wir, dass $[y] \subseteq [x]$. Damit sind Äquivalenzklassen gleich, oder ihr Schnitt ist leer. Folglich ist X/R eine Partition. Nun betrachten wir $\phi(X/R) = R_{X/R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{X/R} &= \{(x, y) \in X \times X \mid \exists [x] \in X/R : x, y \in [x]\} && (21) \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid [x] = [y]\} = R && (22) \end{aligned}$$

wobei wir lediglich Definitionen eingesetzt haben. ϕ ist folglich surjektiv.
Um die Injektivität zu prüfen, wollen wir sehen, dass jede Äquivalenzrelation nur ein Urbild hat. Angenommen es gibt mit $\rho, \rho' \subseteq \mathcal{P}(X)$, zwei Partitionen, sodass $R_\rho = R_{\rho'}$. Dann gilt

$$\{(x, y) \in X \times X \mid \exists Y \in \rho : x, y \in Y\} = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists Y \in \rho' : x, y \in Y\} \tag{23}$$

Für ein beliebiges $x \in X$ gilt, da es in einer Menge $Y \in \rho$ liegt, dass es mit allen Elementen aus Y in einer Äquivalenzklasse liegt. Da Äquivalenzklassen eindeutig sind, die in Relation stehenden Paare von R_ρ und $R_{\rho'}$ aber gleich sind, muss x in beiden Partitionen in genau der gleichen Menge liegen. Da dies für alle $x \in X$ gilt, sind alle Mengen in ρ und ρ' gleich, also sind auch die Partitionen gleich. Folglich ist ϕ eine Bijektion.

Aufgabe 2
Sei A eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Konstruiere mithilfe von Induktion eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A.

Lösung:
Unser Ziel ist es, in jeder der beiden Richtungen eine Injektion zu definieren. Aufgabe 4 vom ersten Übungsblatt erlaubt es uns daraus eine Bijektion zu konstruieren. Wir wiederholen einmal wie vollständige Induktion funktioniert:
Dazu sei $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Menge von Aussagen, die wir für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen. Die Vollständige Induktion besteht nun aus folgenden drei Schritten:

1. *Induktionsanfang:* Hier wählen wir einen Startpunkt aus (üblicherweise das kleinste $n \in \mathbb{N}$ für das unsere Aussage gilt) und zeigen die Aussage hier direkt. Unten werden wir mit $n = 0$ beginnen.

2. *Induktionsvoraussetzung:* Hier nehmen wir an, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass P_n gilt. Welches n das ist, wird nicht weiter spezifiziert. Dass es zumindest ein einzelnes solches n gibt, haben wir im Induktionsanfang bewiesen. Streng genommen ist die Induktionsvoraussetzung also kein wirklicher Beweisschritt, sondern nur eine explizite Ausformulierung dessen, was wir beweisen wollen. Deswegen findet man häufig auch die Definition, dass vollständige Induktion aus zwei Schritten besteht.

3. *Induktionsschritt:* Hier wollen wir zeigen, dass P_{n+1} gilt und dürfen dabei die Induktionsvoraussetzung, also die Tatsache, das P_n gilt, verwenden.

Die Idee dahinter ist folgende: Wir können in der Praxis nicht für jedes einzelne $n \in \mathbb{N}$ individuell zeigen, dass P_n gilt, denn dafür bräuchten wir eine unendliche Menge an Beweisen. Wir können aber mit dem hier genannten Verfahren sozusagen eine unendliche Menge an Beweisen mit nur zwei Schritten konstruieren. Wollen wir für ein bestimmtes $m \in \mathbb{N}$ zeigen, dass P_m gilt, sähe der Beweis ausgeführt so aus:
Wir wissen, dass P_1 gilt, das sagt uns der Induktionsanfang. P_1 sei nun unsere Induktionsvoraussetzung. Da wir gezeigt haben, dass der Induktionsschritt gültig ist, wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, sehen wir, dass dann auch P_2 gilt. Wir wählen P_2 als neue Induktionsvoraussetzung und zeigen mit dem Induktionsschritt, dass auch P_3 gilt - und so weiter.
Der letzte Absatz dient nur der Erläuterung - er wird *nie* hingeschrieben, man beschränkt sich immer nur auf die drei eingekastelten Schritte und weiß dann mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wichtig ist auch die Unterscheidung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, bzw. zwischen abzählbaren und überabzählbaren Mengen. In abzählbaren Mengen kann man die Elemente mithilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren und landet "irgendwann" bei jedem Element. Das heißt, dass man hier die vollständige Induktion anwenden kann. Bei überabzählbaren Mengen geht das nicht mehr - hier gibt es keine Möglichkeit, die Elemente der Menge mit den natürlichen Zahlen durchzunummerieren, also gäbe es Elemente bei denen man mithilfe des eben angedeuteten Verfahrens nie ankäme.

Der Beweis selbst ist nun eine einfache Anwendung der vollständigen Induktion:

Wir definieren eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to A \tag{24}$$

und müssen nun zeigen, dass wir eine Abbildungsvorschrift finden können, die injektiv ist. Wenn wir zeigen können, dass wir das für jede Teilmenge $\{0, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ definieren können, sind wir fertig indem wir vollständige Induktion anwenden.

IA A ist eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Insbesondere gibt es also ein Element a_0. Wir definieren nun

$$f_0 : \{0\} \to A \tag{25}$$
$$0 \mapsto a_0 \tag{26}$$

Offensichtlich ist diese Abbildung injektiv.

IV Wir nehmen an, dass es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq A$ und eine injektive Abbildung

$$f_n : \{0, \dots, n\} \to A \tag{27}$$
$$j \mapsto a_j \tag{28}$$

gibt.

IS Wir wollen nun zeigen, dass es unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung auch für $n+1$ eine solche Menge und eine solche Abbildung gibt. Da A unendlich und $\{a_0, \dots, a_n\}$ eine endliche Menge ist, gibt es ein Element $a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$. Wir definieren nun

$$f_{n+1} : \{0, \dots, n+1\} \to A \tag{29}$$
$$j \mapsto a_j \tag{30}$$

Die Abbildung f_{n+1} eingeschränkt auf die Menge $\{0, \dots, n\}$ ist laut Induktionsvoraussetzung injektiv. Außerdem ist a_{n+1} nicht im Bild der eingeschränkten Abbildung, also kann es außer $n+1$ kein Element in $\{0, \dots, n+1\}$ geben, das auf a_{n+1} abgebildet wird. Unsere neue Abbildung ist also injektiv.

Mit vollständiger Induktion sehen wir also, dass es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Umgekehrt ist die Inklusion

$$\iota : A \to \mathbb{N} \tag{31}$$
$$n \mapsto n \tag{32}$$

offensichtlich injektiv. Da wir also in jede Richtung eine Injektion definiert haben, können wir Aufgabe 4 vom ersten Übungsblatt anwenden und so eine Bijektion konstruieren.

Aufgabe 3

Berechne die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks (ohne Selbstüberschneidungen) mithilfe von Induktion.

Lösung:

Wir behaupten, dass die Innenwinkelsumme in einem solchen n-Eck (für $n \geq 3$) genau $(n-2) \cdot 180\,\mathrm{deg}$ beträgt. Um das zu sehen:

IA Wir beginnen mit einem Dreieck. Wir verwenden unser Wissen über grundlegende Geometrie und sehen, dass die Winkelsumme $180\,\mathrm{deg}$ ist, also genau $(3-1) \cdot 180\,\mathrm{deg}$. Die Aussage gilt also für zumindest ein n.

IV Wir nehmen an, dass für ein $n \geq 3$ gilt, dass die Winkelsumme des n-Ecks $(n-2) \cdot 180\,\mathrm{deg}$ beträgt.

IS Sei nun ein $n+1$-Eck gegeben. Dieses besteht aus den $n+1$ Ecken $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ und den Linien dazwischen. Wir können nun das n-Eck betrachten, das aus $A_1, \dots, A_n$ besteht. Laut Induktionsvoraussetzung beträgt die Winkelsumme hier $(n-2) \cdot 180\,\mathrm{deg}$. Fügen wir nun an der Linie $\overline{A_n A_1}$ ein Dreieck $\overline{A_n A_{n+1} A_1}$ hinzu, dann wird jeder der Innenwinkel des Dreiecks vollständig zu den Innenwinkeln des n-Ecks addiert und wir erhalten das $n+1$-Eck von dem wir ausgegangen sind. Die Winkelsumme erhöht sich also um 180 Grad, ist also nun $(n-1) \cdot 180\,\deg$. Die Aussage gilt also nun für $n+1$

Mit dieser vollständigen Induktion haben wir die Aussage für alle n-Ecke gezeigt.

Aufgabe 4

1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweise $e^{-1} = e$ und $\forall g \in G : (g^{-1})^{-1} = g$
2. Sei G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G$ eine assoziative Operation auf G. Zeige, dass aus

$$\exists e \in G \forall g \in G : g \cdot e = g \tag{33}$$
$$\forall g \in G \exists h \in G : g \cdot h = e \tag{34}$$

folgt, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Lösung:
Wir erinnern uns, was eine Gruppe ist.

Sei G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G$ eine Abbildung, genannt *Verknüpfung* oder *Gruppenoperation*. Wir nennen $(G, \cdot)$ eine *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt werden:

1. *Existenz eines neutralen Elements* Es gibt ein Element $e \in G$, sodass die Verknüpfung mit diesem Element alle andere Elemente unverändert lässt. Wir nennen e das *neutrale Element* In Formeln:
$$\exists e \in G \forall g \in G : e \cdot g = g = g \cdot e \tag{35}$$
2. *Existenz inverser Elemente* Für jedes Element $g \in G$ gibt es ein anderes Element $h \in G$, sodass die Verknüpfung der beiden Elemente das neutrale Element ergibt. Wir nennen h in diesem Fall das *zu g inverse Element* und schreiben es g^{-1} oder $-g$. In Formeln:
$$\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \cdot g = e = g \cdot g^{-1} \tag{36}$$
3. *Assoziativität* Die Reihenfolge in der wir die Verknüpfung auf mehrere Elemente anwenden ist irrelevant. In Formeln:
$$\forall g, h, k \in G : (g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k) \tag{37}$$

Gilt Kommutativität der Abbildung, also

4. *Kommutativität* Unter Vertauschung des ersten und zweiten Arguments bleibt die Verknüpfung gleich. In Formeln:
$$\forall g, h \in G : g \cdot h = h \cdot g \tag{38}$$

so nennen wir G eine *abelsche Gruppe*

Gruppen sind eine der grundlegenden algebraischen Strukturen. Man kann sie auch als einen Monoid definieren, in dem zu jedem Element ein Inverses existiert. Meistens ist aus dem Kontext klar, was die Gruppenoperation ist und man schreibt einfach nur G. Es gibt verschiedene Schreibweisen

für Gruppen. Üblicherweise verwendet man bei nicht abelschen Gruppen die multiplikative Schreibweise, schreibt also für die Operation $\cdot$, schreibt das neutrale Element häufig als 1, das inverse Element als g^{-1} und kann Produkte $\prod$ verwenden. In diesem Fall kann das Verknüpfungszeichen auch weggelassen werden und $g \cdot h$ als gh geschrieben werden.
Auf der anderen Seite gibt es die additive Schreibweise. Üblicherweise verwendet man sie nur bei abelschen Gruppen und schreibt dann + als Verknüpfungszeichen. In diesem Fall ist das neutrale Element häufig die 0 und das inverse Element ist üblicherweise $-g$. Vielfache Anwendungen der Verknüpfung werden mit dem Summenzeichen $\sum$ geschrieben. Wir zeigen kurz für eine allgemeine Gruppe $(G, \cdot)$, dass das neutrale und das inverse Element eindeutig sind, bevor wir die Aufgabe selbst lösen:

- Seien e, e' zwei neutrale Elemente. Dann gilt, mit obiger Definition eines neutralen Elements:

$$e = e \cdot e' = e' \tag{39}$$

- Sei $g \in G$ beliebig und seien h, k zwei beliebige zu g inverse Elemente. Dann gilt:

$$h = h \cdot e = h \cdot (g \cdot k) = (h \cdot g) \cdot k = e \cdot k = k \tag{40}$$

  wobei wir Assoziativität und die Eigenschaft eines inversen Elements verwendet haben.

Der eigentliche Beweis:

1. Wir zeigen, dass das neutrale Element selbstinvers ist. Sei also e das neutrale Element mit inversem e^{-1}. Dann gilt:

$$e^{-1} = e \cdot e^{-1} = e \tag{41}$$

   wobei wir im ersten Schritt verwendet haben, dass e das neutrale Element ist und im zweiten Schritt, dass e^{-1} das Inverse zu e ist. Ähnlich zeigen wir, dass das Inverse des Inversen wieder das Element selbst ist. Sei dazu also $g \in G$ mit inversem Element $g^{-1} \in G$. Dann gilt:

$$(g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} \cdot e = (g^{-1})^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot g) = ((g^{-1})^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot g = e \cdot g = g \tag{42}$$

   Die Elemente sind also gleich.

2. Nun zeigen wir noch, dass eine Menge mit diesen Eigenschaften eine Gruppe ist. Dafür nehmen wir an, dass es $g \in G$ gibt, dann gibt es laut Bedingung ein $h \in G$, sodass $g \cdot h = e$ und auch ein $k \in G$, sodass $h \cdot k = e$. Wir rechnen (wobei wir jetzt das Verknüpfungszeichen weglassen):

$$g = ge = g(hk) = (gh)k = ek \tag{43}$$

   und setzen das in folgende Gleichung ein:

$$hg = h(ek) = (he)k = hk = e \tag{44}$$

   also haben wir bereits gezeigt, dass für ein beliebiges Element $g \in G$ ein Inverses Element $h \in G$ existiert, da nun $gh = e = hg$ gilt. Um zu zeigen, dass e ein Inverses Element im obigen Sinne ist, rechnen wir

$$eg = (gh)g = g(hg) = ge = g \tag{45}$$

   also ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

Der zweite Teil dieser Aufgabe zeigt, dass obige Definition einer Gruppe umfangreicher ist, als sie eigentlich sein müsste. Die in Teilaufgabe 2 definierte Struktur könnte man *rechtsseitige Gruppe*, e ein *rechtsneutrales Element* und g^{-1} ein *rechtsinverses Element* nennen, analog definiert man eine linksseitige Gruppe. In diesem Fall spricht man auch von den *schwachen Gruppenaxiomen.* Da wir zu keinem Punkt Kommutativität angenommen haben folgt aber, dass diese Strukturen äquivalent zu unserer Definition einer Gruppe sind - und da dies ausdrückt, woran wir eigentlich interessiert sind, werden Gruppen üblicherweise wie oben definiert.