Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 6

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

1. Sei X eine Menge, $\mathbb{K}$ ein Körper und $V := \mathsf{Abb}(X, \mathbb{K})$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Körperstruktur auf $\mathbb{K}$ eine Vektorraumstruktur auf V induziert.
2. Sei nun $|X| = n$. Konstruiere eine bijektive, lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}^n$.
3. Zeige, dass $1, \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx)$ als Elemente von V über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Lösung:
Wir wiederholen Vektorräume und die damit verbundenen Konzepte:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum* ein Tupel $(V, +, \cdot)$ mit zwei Verknüpfungen sodass

1. Die *Vektoraddition* ist $+ : V \times V \to V$. Mit ihr ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.
2. Die *Skalarmultiplikation* ist $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$. Sie ist assoziativ:
$$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{K}, v \in V : (\mu \cdot_{\mathbb{K}} \lambda) \cdot v = \mu \cdot (\lambda \cdot v) \tag{1}$$
Hier ist $\cdot_{\mathbb{K}}$ die Multiplikation in $\mathbb{K}$. Das neutrale Element der Multiplikation $\mathbb{1}_{\mathbb{K}}$ des Körpers, fungiert auch als neutrales Element der Skalarmultiplikation:
$$\forall v \in V : \mathbb{1}_{\mathbb{K}} \cdot v = v \tag{2}$$
Üblicherweise wird $\cdot$ nicht ausgeschrieben, es gilt also $\mu \cdot v =: \mu v$.
3. Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfüllen das Distributivgesetz: Es gilt also für alle $u, v \in V, \mu, \lambda \in \mathbb{K}$, dass
$$(\mu +_{\mathbb{K}} \lambda) v = (\mu \cdot v) + (\lambda \cdot v) \tag{3}$$
$$\mu(v + w) = (\mu \cdot v) + (\mu \cdot w) \tag{4}$$
wobei $+_{\mathbb{K}}$ die Addition des Körpers ist.

Elemente von V nennen wir *Vektoren*

Wir sehen, dass wir an einigen Stellen zwischen der Multiplikation, bzw. Addition des Körpers und des Vektorraums unterscheiden müssen. Wir können sie dennoch beide mit dem gleichen Symbol kennzeichnen, da aus dem Kontext jeweils klar ist, welche der beiden Operationen gerade angewandt wird.

Nachdem wir eine neue Algebraische Struktur definiert haben, ist der natürliche nächste Schritt üblicherweise, sich Abbildungen zwischen den Strukturen anzuschauen, also definieren wir:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ ist ein $\mathbb{K}$-*Vektorraumhomomorphismus*, oder eine $\mathbb{K}$-*lineare Abbildung*, wenn gilt:

$$\forall u, v \in V : \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) \tag{5}$$
$$\forall \mu \in \mathbb{K}, v \in V : \varphi(\mu \cdot v) = \mu\varphi(v) \tag{6}$$

Diese beiden Bedingungen kann man zu der einen Bedingung

$$\forall \mu \in \mathbb{K}, u, v \in V : \varphi(\mu \cdot u + v) = \mu\varphi(u) + \varphi(v) \tag{7}$$

zusammenfassen.

Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, wieso die letzte Aussage gilt. Man beachte auch, dass wir hier die Operationen in V und W jeweils mit den gleichen Symbolen bezeichnen. Aus dem Kontext ist jedoch klar, wann welche Operation angewandt wird. Wir sehen hier deutlich die Parallelen zwischen einem Gruppenhomomorphismus und einem Vektorraumhomomorphismus. Betrachten wir $\mathbb{R}$ als einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, dann sind Vektorraumhomomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen[1] genau das, was man als lineare Abbildung kennt.

Wir betrachten nun noch

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein *Untervektorraum*, oder *linearer Unterraum* von V, wenn $(U, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Insbesondere müssen also die Operationen aus V geerbt werden, damit U wirklich als Unterraum gelten kann. Es gilt folgendes:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

- Eine Untermenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Untervektorraum, wenn gilt:

$$U \neq \emptyset \tag{8}$$
$$\forall u, v \in U : u + v \in U \tag{9}$$
$$\forall \mu \in \mathbb{K}, u \in U : \mu u \in U \tag{10}$$

  Wobei wir die erste Bedingung auch durch $0 \in U$ ersetzen können.

- Sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume, dann ist auch der Schnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ ein Untervektorraum.

[1] In der Schule werden lineare Abbildungen üblicherweise als $f(x) = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$ definiert. Diese Definition sollte man schnell vergessen, denn in unserem Verständnis sind diese Abbildungen *affin lineare Abbildungen*. Sie sind nicht linear, da $f(x+y) = f(x) + f(y)$ nicht gilt (außer $t = 0$)

- Sind $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume, dann ist die Vereinigung im allgemeinen **kein** Untervektorraum.

Wichtig im Zusammenhang mit Vektorräumen ist das Konzept von Linearkombinationen, auf denen wiederum der Begriff der Basis fußen wird. Es gilt in diesem Zusammenhang:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ und $v_1, \dots, v_r \in V$, dann nennen wir

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \tag{11}$$

eine $\mathbb{K}$-*Linearkombination*. Wir definieren weiter den *Spann* von $v_1, \dots, v_r$, bzw., den von ihnen *erzeugten Vektorraum* als

$$< v_1, \dots, v_r > := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\} \tag{12}$$

Gilt für einen Untervektorraum $U \subseteq V$, dass $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$, dann nennen wir $v_1, \dots, v_r$ ein *Erzeugendensystem* von U. Gilt für die Vektoren, dass die Gleichung

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r = 0 \tag{13}$$

für $\mu_j \in \mathbb{K}$ nur die eindeutige Lösung $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$ hat, dann nennen wir $v_1, \dots, v_r$ $\mathbb{K}$-*linear unabhängig.*

Vektoren $v_1, \dots, v_r$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als eine Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Nun können wir die Aufgabe selbst lösen:

1. Da X eine Menge ohne weitere Eigenschaften ist, muss der Beweis lediglich auf den Eigenschaften von $\mathbb{K}$ fußen. Wenn wir zeigen wollen, dass $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist, dann müssen wir die beiden Operationen jeweils erst definieren und danach zeigen, dass sie die geforderten Eigenschaften erfüllen. Man beachte hierbei: Wenn wir f schreiben, dann ist damit die Abbildung selbst, also der Vektor gemeint. Haben wir $x \in X$ (egal ob konkret oder als Variable), so ist $f(x)$ das Element in $\mathbb{K}$ auf das x von f abgebildet wird. Wir gehen Schritt für Schritt vor:

   (a) *Vektoraddition*: Wir wollen eine Addition zwischen Funktionen $f, g : X \to \mathbb{K}$ definieren, die im Endeffekt direkt auf der Addition in $\mathbb{K}$ beruht. Die natürliche Art das zu erreichen ist über die *punktweise Addition* bei der wir für jeden Punkt $x \in X$ die Funktionswerte der beiden Abbildungen addieren:

   $$+ : V \times V \to V \tag{14}$$

   $$(f, g) \mapsto \begin{pmatrix} X \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{pmatrix} \tag{15}$$

   Es gilt also $\forall x \in X : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Die Addition auf der linken Seite ist dabei die Vektoraddition in V, die Addition auf der rechten Seite ist die Körperaddition in $\mathbb{K}$. Um zu sehen, dass diese Definition wohldefiniert ist, überlegen wir uns Folgendes: Die Abbildung $x \mapsto f(x) + g(x)$ ist als Abbildung $X \to \mathbb{K}$ wohldefiniert, da die Körperaddition in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist und f, g als Abbildungen linkstotal sind, also bildet $+$ wieder nach V ab.

Wir wissen, dass zwei Funktionen $\varphi, \psi : X \to \mathbb{K}$ genau dann gleich sind, wenn sie jedes Element gleich abbilden. Dadurch, dass wir für jedes Element in der Definitionsmenge ($x \in X$) einen Wert in der Zielmenge angegeben haben, ist die Funktion also bereits vollständig definiert. Wollen wir nun also zeigen, dass zwei Vektoren $u, v \in V$ gleich sind, reicht es zu überprüfen, ob sie auf alle Elemente in X gleich wirken, also $\forall x \in X : u(x) = v(x)$ zu prüfen. Wir wollen zeigen, dass mit dieser Verknüpfung $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und zeigen dafür die einzelnen Gruppenaxiome:

i. *Assoziativität*: Seien $x \in X$ und $f, g, h \in V$, dann gilt:

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) && (16) \\ &= (f(x)+g(x)) + h(x) && (17) \\ &= f(x) + (g(x)+h(x)) && (18) \\ &= f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x) && (19) \end{aligned}$$

wobei wir in der Mitte verwendet haben, dass die Addition in $\mathbb{K}$ assoziativ ist. Dieses Vorgehen - die Eigenschaften des Vektorraums zu zeigen, indem wir die Operationen auf $\mathbb{K}$ zurückziehen, wird sich durch die ganze Aufgabe ziehen.

ii. *Kommutativität*: Das funktioniert analog. Seien $x \in X, f, g \in V$, dann gilt:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \tag{20}$$

wobei wir verwenden, dass $g(x)$ und $f(x)$ nun lediglich Elemente in $\mathbb{K}$ sind und wir dort wissen, dass die Addition kommutativ ist.

iii. *Neutrales Element*: Das neutrale Element ist eine Abbildung $\varphi \in V$, sodass $\forall f \in V : f + \varphi = f$ gilt. Das ist äquivalent zu:

$$\forall f \in V : \forall x \in X : f(x) + \varphi(x) = f(x) \tag{21}$$

Die Gleichung $f(x) + \varphi(x) = f(x)$ wird, unabhängig davon, welches Element $f(x) \in \mathbb{K}$ genau vorliegt, immer durch das neutrale Element $0_{\mathbb{K}}$ erfüllt. Wir definieren unser neutrales Element bezüglich der Vektoraddition also als

$$\begin{aligned} 0_V : X &\to \mathbb{K} && (22) \\ x &\mapsto 0_{\mathbb{K}} && (23) \end{aligned}$$

Setzen wir das nun in obige Gleichung ein, sehen wir für ein beliebiges $f \in V$ und $x \in X$, dass

$$f(x) + 0_V(x) = f(x) + 0_{\mathbb{K}} = f(x) \tag{24}$$

also erfüllt $0_V(x)$ unsere Ansprüche und ist das neutrale Element bezüglich Vektoraddition.

iv. *Inverses Element*: Das inverse Element zu $f \in V$ ist eine Abbildung $g \in V$, sodass $f + g = 0_V$ ergibt. Das heißt es muss gelten $\forall x \in X : f(x) + g(x) = 0_V(x) = 0_{\mathbb{K}}$, also

$f(x) = -g(x)$. Das heißt $g(x)$ ist das inverse (bezüglich Körperaddition) zu $f(x)$. Wir definieren dementsprechend

$$-f : X \to \mathbb{K} \tag{25}$$

$$x \mapsto -f(x) \tag{26}$$

und haben ein inverses Element gefunden.

Insgesamt ist $(V, +)$ also eine abelsche Gruppe.

(b) *Skalarmultiplikation* An sich ist unser Vorgehen hier das Gleiche. Wir definieren eine natürliche Skalarmultiplikation durch

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \tag{27}$$

$$(\lambda, f) \mapsto \begin{pmatrix} X \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{pmatrix} \tag{28}$$

und schreiben dafür $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, ziehen die Multiplikation in V also auf die Multiplikation in $\mathbb{K}$ zurück. Auch hier sehen wir, dass die Abbildung wohldefiniert und assoziativ ist. Man sieht auch direkt, dass für ein beliebiges $f \in V$ gilt $\mathbb{1}_{\mathbb{K}} \cdot f = f$, denn

$$\forall x \in X : (\mathbb{1}_{\mathbb{K}} \cdot f)(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{K}} f(x) = f(x) \tag{29}$$

womit wir sehen, dass f und $\mathbb{1}_{\mathbb{K}} \cdot f$ alle Elemente gleich abbilden und folglich die gleiche Abbildung sind. Die Skalarmultiplikation erfüllt damit alle gewünschten Eigenschaften.

(c) *Distributivität* Wir haben die Addition und Multiplikation bereits definiert, also können wir die beiden Distributivgesetze direkt zeigen. Diese Eigenschaft wird aber wieder direkt aus $\mathbb{K}$ geerbt, da die Addition und Multiplikation dort distributiv sind.

Damit haben wir gezeigt, dass $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Wir bemerken hier: Wichtig ist, dass es im Allgemeinen keine Multiplikation zwischen Vektoren gibt. Dafür betrachten wir auch folgendes Beispiel:

Wir betrachten den Raum $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear }\}$ aller linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ein Vektor ist in diesem Zusammenhang also wieder eine Funktion. Diesmal schränken wir uns jedoch auf lineare Abbildungen ein. Der Beweis, wieso das ganze ein Vektorraum ist, läuft analog zur eben gelösten Aufgabe, oder man überlegt sich, dass $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ laut Teilaufgabe 1. ein Vektorraum ist und $U \subseteq V$ gilt der Vektorraum nicht leer ist und Addition und Multiplikation abgeschlossen sind.

Aber wie sähe eine Multiplikation auf diesem Vektorraum aus? Wir könnten definieren

$$* : V \times V \to V \tag{30}$$

$$(f, g) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{pmatrix} \tag{31}$$

wobei die punktweise Multiplikation wieder auf $\mathbb{R}$ zurückgezogen wird. Diese Abbildung wäre allerdings nicht wohldefiniert, denn für die beiden Abbildungen $f(x) = g(x) = x$ wäre das Produkt $f * g$ die Abbildung $x \mapsto x^2$, die nicht linear ist. Insofern ist es für diesen Vektorraum wichtig, immer klar zu wissen, mit welchen Objekten wir gerade arbeiten. Während beispielsweise $f(x) \cdot g(x)$ als Produkt in $\mathbb{K}$ Sinn macht, wäre das für $f \cdot g$ als Produkt in V nicht der Fall.

Das Beispiel von gerade eben erzählt nur die halbe Geschichte: Eine sinnvolle Multiplikation zwischen linearen Abbildungen eines Vektorraums in sich selbst, kann durch Komposition definiert werden, also $f \circ g$. In diesem Fall formen die linearen Abbildungen eine sogenannte $\mathbb{K}$-*Algebra*. Ein sehr großer Teil der linearen Algebra wird sich damit beschäftigen, die $\mathbb{R}$-*Algebra* von linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu untersuchen - aber das kommt dann noch.

2. Wir nehmen nun an, dass $|X| = n$ gilt, insbesondere ist X also endlich und wir nummerieren die Objekte als $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir wollen eine bijektive, lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}^n$ definieren. Da wir bereits gezeigt haben, dass V ein Vektorraum ist, wissen wir, dass lineare Abbildung in diesem Zusammenhang bedeutet, dass es ein Vektorraumhomomorphismus sein soll, da dieser bijektiv ist, wird es also ein Isomorphismus von Vektorräumen sein. Sei $f : X \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Jedes Element aus $x \in X$ wird auf ein eindeutiges Element in $f(x) \in \mathbb{K}$ abgebildet. Hintereinander geschrieben ergeben diese Elemente das Tupel $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{K}^n$. Wir haben also eine Möglichkeit gefunden, die gesamten Informationen die f beinhaltet, in einem Element aus $\mathbb{K}^n$ darzustellen. Umgekehrt beschreibt ein solches Tupel auch die Abbildung eindeutig. Das ist die Idee unserer Abbildung, wir müssen nun formal zeigen, dass sie die Bedingungen erfüllt.

Wir definieren die (offenbar wohldefinierte[a]) Abbildung

$$\Phi : V \to \mathbb{K}^n \tag{32}$$

$$f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) \tag{33}$$

und zeigen, dass sie ein Vektorraumhomomorphismus ist. Dafür verwenden wir die Definitionen für Vektoraddition und Skalarmultiplikation aus der ersten Teilaufgabe. Es gilt für zwei beliebige Vektoren $f, g \in V$, dass

$$\Phi(f+g) = ((f+g)(x_1), \dots, (f+g)(x_n)) \tag{34}$$
$$= (f(x_1)+g(x_1), \dots, f(x_n)+g(x_n)) \tag{35}$$
$$= (f(x_1), \dots, f(x_n)) + (g(x_1), \dots, g(x_n)) = \Phi(f) + \Phi(g) \tag{36}$$

und für $f \in V, \lambda \in \mathbb{K}$, dass

$$\Phi(\lambda f) = ((\lambda f)(x_1), \dots, (\lambda f)(x_n)) \tag{37}$$
$$= (\lambda f(x_1), \dots, \lambda f(x_n)) \tag{38}$$
$$= \lambda(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda\Phi(f) \tag{39}$$

also ist Φ ein Homomorphismus, d.h. eine lineare Abbildung. Auch hier funktioniert der Beweis aufgrund der jeweiligen Eigenschaften der Operationen auf den Vektorräumen, diese müssen also vorher bekannt sein.

Nachdem wir gezeigt haben, dass es ein Homomorphismus ist, wollen wir als nächstes die Bijektivität prüfen. Wir können dazu entweder Injektivität und Surjektivität separat prüfen, oder eine Abbildung $\Psi : \mathbb{K}^n \to V$ definieren, die ein beidseitiges Inverses von Φ ist. Das ist im Endeffekt eine Geschmacksfrage, wir zeigen hier explizit, dass Φ injektiv und surjektiv ist.[b]

(a) *Injektivität*: Wir weisen diese Eigenschaft über den Kern nach. Zur Erinnerung: Φ ist injektiv, genau dann, wenn $\ker(\Phi) = \{f \in V \mid \Phi(f) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$ lediglich das neutrale Element von V enthält. Sei also $f \in \ker(\Phi)$, das heißt

$$(0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}^n} = \Phi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n)) \tag{40}$$

also gilt $\forall x \in X : f(x) = 0_{\mathbb{K}}$, was aber laut obiger Definition genau dem neutralen Element der Vektoraddition in V entspricht. Damit gilt $\ker(\Phi) = \{0_V\}$, woraus folgt, dass Φ injektiv ist.

(b) *Surjektivität*: Sei $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$. Dann definieren wir

$$f : X \to \mathbb{K} \tag{41}$$
$$x_j \mapsto k_j \tag{42}$$

Dann gilt $\Phi(f) = (k_1, \dots, k_n)$ und Φ ist surjektiv.

Damit ist Φ ein geeigneter Isomorphismus.

[a] Wem nicht klar ist wieso, der sollte es explizit nachrechnen

[b] Es ist eine gute Übung, sich zu überlegen, wie die inverse Abbildung aussieht und zu beweisen, dass es eine inverse Abbildung ist.

3. Es gibt verschiedene Methoden um zu beweisen, dass trigonometrische Funktionen linear unabhängig sind. Man könnte beispielsweise $n+2$ Punkte x_j wählen und induktiv zeigen, dass wir in der Linearkombination $\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \ldots + \lambda_n \cos(nx)$ für jeden Punkt einen Koeffizienten festlegen müssen, dann aber für den letzten Punkt kein Koeffizient mehr übrig bleibt, dieser aber mit der bisherigen Kombination von Kosinus ungleich 0 ist. Hierbei müsste man aufpassen, dass man die Punkte korrekt wählt. Wir wählen jedoch einen anderen Weg. Ebenfalls induktiv zeigen wir die Aussage über die zweite Ableitung, die wiederum ein Kosinus

ist.

Wir zeigen das ganze induktiv. Dafür:

IA Wir beginnen mit dem Fall $n = 1$, zeigen also, dass die beiden Abbildungen $1, \cos(x)$ linear unabhängig sind. Dafür betrachten wir die Gleichung

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 \cos(x) = 0 \tag{43}$$

mit $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist $\cos(x)$ zwar noch die Abbildung in V, aber die Gleichung gilt auch, wenn wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ einsetzen, da wir die Addition punktweise definiert hatten. Wenn die Gleichung für beliebige x gelten muss, dann auch für $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = 0$.

$$0 \overset{!}{=} \lambda_0 1 + \lambda_1 \cos(x_1) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_0 \tag{44}$$

also gilt $\lambda_0 = 0$. Für x_2 gilt dann:

$$0 \overset{!}{=} \lambda_0 1 + \lambda_1 \cos(x_2) = \lambda_1 \cos(0) = \lambda_1 \tag{45}$$

also gilt auch $\lambda_1 = 0$. Die beiden Funktionen sind also linear unabhängig.

IV Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage gilt, dass $1, \cos(x), \ldots, \cos(nx)$ linear unabhängig sind.

IS Nun betrachten wir die $n+1$ Funktionen $1, \cos(x), \ldots, \cos((n+1)x)$ und die Gleichung

$$\lambda_0 1 + \ldots + \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0 \tag{46}$$

für $\forall j \in \{0, \ldots, n+1\} : \lambda_j \in \mathbb{R}$. Da Kosinus beliebig oft differenzierbar ist, können wir diese Gleichung nun zweimal ableiten und erhalten:

$$-\lambda_1 \cos(x) - 2^2 \lambda_2 \cos(2x) - \ldots - (n+1)^2 \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0 \tag{47}$$

Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit $(n+1)^2$ und addieren sie zu der zweiten. Dann erhalten wir:

$$\lambda_0 1 + ((n+1)^2 - 1)\lambda_1 \cos(x) + ((n+1)^2 - 2^2)\lambda_2 \cos(2x) + \ldots \tag{48}$$
$$+ ((n+1)^2 - (n+1)^2)\lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0 \tag{49}$$

auf der linken Seite fällt der letzte Term nun weg und übrig bleibt eine Linearkombination von $1, \cos(x), \ldots, \cos(nx)$ deren Summe 0 ergibt. Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass diese Funktionen linear unabhängig sind und ihre Koeffizenten alle gleich 0 sein müssen. Also gilt bereits $\forall j \in \{0, \ldots, n\} \lambda_j = 0$. Und lediglich der letzte Koeffizient ist noch frei. Wir betrachten aber nun wieder die erste Gleichung. Diese lautet nun (mit eingesetzten Koeffizienten)

$$\lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0 \tag{50}$$

woraus sofort $\lambda_{n+1} = 0$ folgt.

Wir haben also gezeigt, dass die Abbildungen als Vektoren in V linear unabhängig sind.

Aufgabe 2
Zeige, dass $\mathbb{R}$ eine natürliche Struktur als $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat und zeige, dass $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

Lösung:
Wir sehen hier, dass wichtig ist über welchem Körper wir einen Vektorraum betrachten. Wir werden nachher sehen, dass die drei Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ linear unabhängig sind, die Gleichung

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 \sqrt{2} + \lambda_3 \sqrt{3} = 0 \tag{51}$$

nur die triviale Lösung hat, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ gilt. Würden wir dagegen Elemente aus $\mathbb{R}$ erlauben, hätte diese Gleichung beispielsweise die Lösung $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, die Vektoren wären also nicht linear unabhängig.

Der Beweis, dass $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, läuft ähnlich zum Beweis ab, dass $\text{Abb}(X, \mathbb{K})$ aus der ersten Aufgabe ein Vektorraum ist. Wir werden ihn hier nur kurz zusammenfassen:

1. *Addition* Wir betrachten als Vektorraumaddition die Addition von $\mathbb{R}$ als Körper. Die Addition in einem Körper ist notwendigerweise eine abelsche Gruppe, also ist auch die Vektorraumaddition eine abelsche Gruppe.

2. *Skalarmultiplikation* Wir können die Multiplikation $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Einschränkung der Körpermultiplikation auf $\mathbb{R}$ definieren, da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ gilt und $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Dann können wir direkt wieder die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ als Körper verwenden. Da $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \cdot v = v$ für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt und die Multiplikation assoziativ ist, müssen wir hier weiter nichts zeigen.

3. *Distributivität* Analog zu den bisherigen Schritten, ziehen wir die Operationen auf $\mathbb{R}$ als Körper zurück. Da die Operationen in $\mathbb{R}$ als Körper bereits distributiv sind, sind sie es auch in $\mathbb{R}$ als Vektorraum.

Damit ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wir wollen beweisen, dass die drei Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ linear unabhängig sind. Dafür zeigen wir zuerst, dass sie paarweise linear unabhängig sind:
Wir betrachten die Gleichung

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0 \tag{52}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$. Angenommen $\lambda_1 \neq 0$ (dann folgt sofort $\lambda_2 \neq 0$, da ansonsten $\lambda_1 1 = 0$ zu einem Widerspruch führen würde), dann können wir die Gleichung umstellen zu

$$\sqrt{2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{53}$$

also ist $\sqrt{2}$ als Quotient zweier rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl. Das ist ein Widerspruch, folglich muss $\lambda_1 = 0$ gelten und damit auch $\lambda_2 = 0$. Die beiden Vektoren sind also linear abhängig. Analog zeigen wir, dass 1 und $\sqrt{3}$ linear unabhängig sind und dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig sind.[a] Wir nehmen nun an, dass es eine nichttriviale Linearkombination von $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ gibt, die 0 ergibt. Es gilt also für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$, dass

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 \sqrt{2} + \lambda_3 \sqrt{3} = 0 \tag{54}$$

gilt, aber nicht alle drei Koeffizienten gleich 0 sind. Da nicht nur ein Koeffizient ungleich Null sein kann, müssen mindestens zwei Koeffizienten ungleich Null sein (da sonst alle gleich Null wären).

Wie wir bereits gezeigt haben, sind jeweils zwei Vektoren aber linear unabhängig, also müssen alle drei Koeffizienten ungleich Null sein (da sonst alle gleich Null wären). Da $\lambda_3 \neq 0$ können wir die Gleichung mit $\frac{-1}{\lambda_3}$ multiplizieren und erhalten die neue Gleichung

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \sqrt{3} = 0 \tag{55}$$

Zur besseren Übersicht definieren wir $\mu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, dann lautet unsere Gleichung

$$\mu_1 1 + \mu_2\sqrt{2} - \sqrt{3} = 0 \tag{56}$$

Wir hatten die Gleichung bisher als eine Gleichung in $\mathbb{R}$ als Vektorraum betrachtet - aber nichts hindert uns daran, sie auch als Gleichung in $\mathbb{R}$ als Körper zu betrachten. Da die Operationen in dem Vektorraum $\mathbb{R}$ die gleichen wie im Körper $\mathbb{R}$ sind, ändert sich nichts, aber wir dürfen in $\mathbb{R}$ zusätzlich Vektoren multiplizieren. Das nutzen wir aus um die Gleichung umzustellen und zu quadrieren:[b]

$$3 = \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\sqrt{2} + 2\mu_2^2 \tag{57}$$

Das können wir nun wieder als eine Vektorraumgleichung betrachten:

$$0 = (\mu_1^2 + 2\mu_2^2 - 3)1 + 2\mu_1\mu_2\sqrt{2} \tag{58}$$

Wir haben hier eine Linearkombination aus 1 und $\sqrt{2}$ die insgesamt 0 ergibt, also müssen die beiden Koeffizienten jeweils 0 sein. Insbesondere muss $\mu_1\mu_2 = 0$ gelten. Ist einer der beiden Koeffizienten gleich Null, reduziert sich unsere ursprüngliche Gleichung aber zu einer Linearkombination aus zwei Vektoren, also müssen alle Koeffizienten gleich Null sein. Das ist ein Widerspruch, folglich kann es keine Linearkombination geben, die nichttrivial ist und 0 ergibt. Das heißt $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sind linear unabhängig.

[a] Daraus folgt noch nicht, dass alle Vektoren zusammen linear unabhängig sind. Man überlege sich dazu folgendes Gegenbeispiel. Wir betrachten die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{0}{1}, v_3 = \binom{1}{1}$, dann sind sie jeweils paarweise linear unabhängig, aber alle drei zusammen sind nicht linear unabhängig, da sich v_3 als die Summe der beiden anderen Vektoren darstellen lässt.

[b] In Zukunft werden wir nicht explizit auf so etwas eingehen.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:

1. Sind $u, v \in V\backslash\{0\}$ linear abhängig, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $u = \lambda v$.

2. Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \Rightarrow v_1 = v_2 \vee \lambda_1 = \lambda_2 \tag{59}$$

3. Sind $u_1, \ldots, u_{n+1} \in V$, sodass u_{n+1} eine Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$ ist, dann gilt $< u_1, \ldots, u_n > = < u_1, \ldots, u_{n+1} >$.

4. Angenommen $u_1, \ldots, u_n \in V$ sind linear unabhängig, aber $u_1, \ldots, u_{n+1} \in V$ sind nicht linear unabhängig. Dann ist u_{n+1} eine Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$.

Lösung:

Diese Aufgabe ist in erster Linie rechnen:

1. Wenn $u, v \in V \backslash \{0\}$ linear abhängig sind, dann heißt das insbesondere, dass es eine Linearkombination

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \tag{60}$$

mit Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gibt und nicht beide Koeffizienten gleich 0 sind. Dann müssen aber beide Koeffizienten ungleich 0 sein, ansonsten gälte z.B. $\lambda_1 u = 0$ für $\lambda_1 \neq 0, v \neq 0$ und wir hätten einen Widerspruch. Da nun $\lambda_1 \neq 0$ gilt, können wir durch λ_1 teilen und die Gleichung umstellen und erhalten

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v \tag{61}$$

also erfüllt $\lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ unsere Bedingungen.

2. Angenommen diese Gleichung gilt, dann können wir sie umstellen:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \tag{62}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_1 = \lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_2 \tag{63}$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0 \tag{64}$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 - v_2) = 0 \tag{65}$$

ein Produkt ist dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also muss entweder $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ gelten oder $v_1 - v_2 = 0$.

3. Definiere $U =< u_1, \dots, u_n >, W =< u_1, \dots, u_{n+1} >$. Wir zeigen hier beide Inklusionen von $U = W$

"$\subseteq$" Da jede Linearkombination von $u_1, \dots, u_n$ auch eine Linearkombination von $u_1, \dots, u_{n+1}$ ist (setze einfach $\lambda_{n+1} = 0$), gilt diese Implikation klarerweise.

"$\supseteq$" Wir wollen nun zeigen, dass $W \subseteq U$, also dass sich jede Linearkombination von $u_1, \dots, u_{n+1}$ bereits als Linearkombination von $u_1, \dots, u_n$ darstellen lässt. Sei also $v \in W$ ein allgemeiner Vektor, dann gilt für geeignete $\lambda_j \in \mathbb{K}$, dass

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} = v \tag{66}$$

Wir wissen aber, dass u_{n+1} eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, also gilt für geeignete $\mu_j \in \mathbb{K}$, dass

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n = u_{n+1} \tag{67}$$

Wir können das in die obige Gleichung einsetzen und erhalten

$$(\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) u_n = v \tag{68}$$

also können wir v auch als Linearkombination von $u_1, \dots, u_n$ darstellen. Folglich gilt $W \subseteq U$

Da wir beide Inklusionen gezeigt haben, gilt $U = W$.

4. Angenommen $u_1, \dots, u_n$ sind linear unabhängig, dann hat die Gleichung

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \tag{69}$$

für $\lambda_j \in \mathbb{K}$ nur die triviale Lösung. Da $u_1, \ldots, u_{n+1}$ linear abhängig sind, hat

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n + \mu_{n+1} u_{n+1} = 0 \tag{70}$$

eine nichttriviale Lösung. In dieser Lösung gilt insbesondere $\mu_{n+1} \neq 0$, da wir ansonsten eine Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$ hätten, die 0 ergibt, also müssten alle Koeffizienten Null sein und dann wäre die gesamte Linearkombination aus $u_1, \ldots, u_{n+1}$ trivial - wir hatten aber angenommen, dass wir eine nichttrivale Lösung haben. Da $\mu_{n+1} \neq 0$, können wir den letzten Summanden auf die andere Seite bringen und durch $-\mu_{n+1}$ teilen und erhalten:

$$u_{n+1} = -\frac{\mu_1}{\mu_{n+1}} u_1 - \ldots - \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} u_n \tag{71}$$

Also ist u_{n+1} die Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$.

Aufgabe 4

1. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +)$ keine Vektorraumstruktur zulässt, unabhängig vom zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$.
2. Zeige, dass eine abelsche Gruppe A genau dann ein $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum für eine Primzahl p ist, wenn $\forall a \in A : pa = 0$ gilt.

Lösung:
Bevor wir die Lösung zeigen, wollen wir noch definieren:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann definieren wir die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$ als

$$\operatorname{char}(\mathbb{K}) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} = 0\} \tag{72}$$

Gibt es kein solches n, setzen wir $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$.

Die Charakteristik beschreibt also, wie oft wir die 1 eines Körpers mit sich selbst addieren müssen, um die 0 des Körpers zu erhalten. Für alle Primzahlen p gilt also für den Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dass

$$\operatorname{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p \tag{73}$$

1. In dieser Aufgabe ist es besonders wichtig zu unterscheiden, wofür ein Symbol gerade steht. Beispielsweise könnte für $1 \in \mathbb{K}$ der Term $3 \cdot 1$ für $1+1+1$ stehen. Man könnte ihn aber erstmal auch als die Multiplikation $3 \cdot 1$ in den ganzen Zahlen verstehen. Die Objekte wären aber möglicherweise sehr unterschiedlich. In dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wäre beispielsweise $1 + 1 + 1 = 1$, da $2 = 0$ gilt. In Z wäre $3 \cdot 1$ natürlich 3 und das ist nicht 1. Das Ganze kann verwirrend wirken, aber aus dem Kontext ist jeweils ersichtlich, welches Objekt gerade gemeint ist. Wir werden die 1 eines Körpers immer mit $1_{\mathbb{K}}$ kennzeichnen um Verwirrungen zu vermeiden und uns streng daran halten, dass bei der Skalarmultiplikation der Skalar links und der Vektor rechts stehen. Um ganz sicher zu gehen, schreiben wir die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ als Vektorraum mit $*$ und in $\mathbb{Z}$ als Ring mit $\cdot$.[2]

[2]Falls noch Verwirrung herrscht: Vielleicht ist es hilfreich, sich die Gleichungen selber einmal aufzuschreiben und bei jedem Element zu notieren, ob es nun ein Vektor oder ein Skalar ist.

Wir unterscheiden hier nach der Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers $\mathbb{K}$.

$\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ In diesem Fall gilt $1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K}$. Wir können jetzt folgendes überlegen: Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann gilt:

$$(1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K}) * z = 1_\mathbb{K} * z + 1_\mathbb{K} * z = z + z = 2z \tag{74}$$

aber auf der anderen Seite gilt auch

$$(1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K}) * z = 0_\mathbb{K} * z = 0_\mathbb{Z} \tag{75}$$

also gilt in $\mathbb{Z}$, dass $0 = 2z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Das ist aber ein Widerspruch, also kann $\mathbb{Z}$ kein Vektorraum über $\mathbb{K}$ sein.

$\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ Wir definieren $2_\mathbb{K} = 1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$. In einem Körper sind alle Elemente außer der 0 invertierbar, also gibt es ein $2_\mathbb{K}^{-1}$, sodass $2_\mathbb{K} 2_\mathbb{K}^{-1} = 1_\mathbb{K}$ gilt. Wir berechnen nun:

$$1_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{K} * 1_\mathbb{Z} = (2_\mathbb{K} 2_\mathbb{K}^{-1}) 1_\mathbb{Z} = (2_\mathbb{K})(2_\mathbb{K}^{-1} 1_\mathbb{Z}) = (1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K})(2_\mathbb{K}^{-1} 1_\mathbb{Z}) = 2 \cdot (2_\mathbb{K}^{-1} 1_\mathbb{Z}) \tag{76}$$

wobei wir in der letzten Gleichung zu einer Gleichung rein in $\mathbb{Z}$ gewechselt sind. Wir haben nun also das Element $(2_\mathbb{K}^{-1} 1_\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}$, das multipliziert mit $2 \in \mathbb{Z}$ das Element $1_\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$ ergibt. Das wäre allerdings ein multiplikatives Inverses zu 2 in den ganzen Zahlen und das kann es nicht geben, also sind wir bei einem Widerspruch gelandet. Folglich kann es für $\mathbb{Z}$ keine $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur geben.

Da wir in beiden Fällen gezeigt haben, dass $\mathbb{Z}$ kein Vektorraum über $\mathbb{K}$ sein kann, kann $\mathbb{Z}$ allgemein kein Vektorraum über einem beliebigen Körper sein.

2. Wir zeigen die Äquivalenz in zwei Richtungen:

“$\Rightarrow$” Wir nehmen an, dass die abelsche Gruppe A ein $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum ist. Dann werden insbesondere alle Vektorraumaxiome erfüllt und es gilt für ein beliebiges Element $a \in A$, dass:

$$pa = \underbrace{a + \ldots + a}_{p\text{-mal}} = \underbrace{([1] + \ldots + [1])}_{p\text{-mal}} a = [p]a = [0]a = 0 \tag{77}$$

was wir zeigen wollten.

”$\Leftarrow$” Wir nehmen an, dass für alle $a \in A$ gilt, dass $pa = 0$. Wenn wir zeigen wollen, dass A in diesem Fall ein $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum ist, müssen wir die Eigenschaften eines Vektorraums zeigen und dafür erst einmal die Operationen definieren. Da wir bereits in der ersten Aufgabe sehr ausführlich Vektorraumaxiome gezeigt haben, gehen wir hier nicht in dieser Ausführlichkeit darauf ein. Wir zeigen nur den Teil ausführlich, der für diese Aufgabe relevant ist.

- *Vektorraumaddition*: Wir definieren die Addition als die Addition der Gruppe. Da A bereits eine abelsche Gruppe ist, gibt es nichts zu zeigen.

- *Skalarmultiplikation*: Wir definieren die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times A \to A \tag{78}$$

$$(k, a) \mapsto \underbrace{a + \ldots + a}_{k\text{-mal}} \tag{79}$$

  Dann gilt in erster Linie zu prüfen, ob diese Multiplikation wohldefiniert ist. Dafür seien $[k] = [l] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, also $\exists n \in \mathbb{Z}$, sodass $k = l + np$. Dann gilt für ein beliebiges $a \in A$:

$$l \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{l\text{-mal}} \tag{80}$$

  und mit der Schreibweise $n * x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}}$ gilt

$$k \cdot a = (l + np) \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{l+np\text{-mal}} = \underbrace{a + \ldots + a}_{l\text{-mal}} + n * (\underbrace{a + \ldots + a}_{p\text{-mal}}) = \underbrace{a + \ldots + a}_{l\text{-mal}} = l \cdot a \tag{81}$$

  sind k, l in der gleichen Äquivalenzklasse, dann ist also auch $l \cdot a = k \cdot a$. Die Multiplikation ist also wohldefiniert. Die beiden anderen Eigenschaften (Assoziativität und das neutrale Element) sind offenbar.
- *Distributivität* Da wir hier nur Elemente zählen und die Gruppe A abelsch ist, ist auch die Distributivität schnell zu sehen.

Also ist A ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.