Lineare Algebra I
Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 7

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Wir betrachten eine 2×3 Tabelle deren Einträge 0 an jeder Stelle sind. Man kann als Operation eine Zelle wählen und dann an dieser Stelle und bei allen Nachbarn Einsen und Nullen vertauschen. Wie viele mögliche Tabellen können wir durch eine Sequenz dieser Operation erreichen?

Lösung:

Für diese Aufgabe werden wir Basen verwenden, wir wiederholen:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine *Basis*, wenn sich jeder Vektor aus V eindeutig als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ darstellen lässt, d.h. wenn gilt:

$$\forall v \in V \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \tag{1}$$

In diesem Fall sagen wir, dass V die *Dimension* n hat, bzw. schreiben $\dim(V) = n$.

Der Unterschied zu einem Erzeugendensystem liegt also darin, dass man für ein allgemeines Erzeugendensystem mehrere Möglichkeiten hat, den gleichen Vektor darzustellen, bei einer Basis nur eine. Wir betrachten nur endlich dimensionale Vektorräume. Es gibt auch Vektorräume, für die es keine endliche Menge von Vektoren gibt, die eine Basis bilden, aber das gehört dann nicht mehr in die lineare Algebra und man hat üblicherweise auch einen anderen Basisbegriff. Es gilt auch:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ eine Menge von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $v_1, \ldots, v_k$ ist eine Basis von V.
2. $v_1, \ldots, v_k$ ist eine maximal linear unabhängige Menge in V. (Also sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig und wenn wir einen beliebigen anderen Vektor $v_{k+1} \in V$ hinzufügen, sind $v_1, \ldots, v_{k+1}$ nicht mehr linear unabhängig.)
3. $v_1, \ldots, v_k$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V. (Also sind $v_1, \ldots, v_k$ ein Erzeugendensystem von V und wenn wir einen der Vektoren v_j entfernen, ist $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_k$ kein Erzeugendensystem mehr.)
4. $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V.
5. $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig und $\dim(V) = k$.

6. $v_1, \ldots, v_k$ sind ein Erzeugendensystem von V und $\dim(V) = k$.

Für die beiden letzteren Aussagen muss man natürlich bereits wissen, was die Dimension des Vektorraums ist. Auf der anderen Seite sieht man aber sofort, dass eine Menge linear unabhängiger Vektoren stets Basis ihres Spanns ist.

Bevor wir an die Lösung selbst gehen, wollen wir uns das Ganze bildlich vorstellen.[1] Zu Beginn haben wir eine Tabelle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und wir können nun an jedem der sechs Einträge die oben beschriebene Operation vornehmen, bzw. Sequenzen solcher Operationen. Die Operation an dem Element der j-ten Zeile und k-ten Spalte nennen wir $s_{j,k}$. Beispielsweise wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_{1,1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_{2,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Uns fällt hier auf, dass ein zweimaliges anwenden von $s_{j,k}$ dazu führt, dass man wieder am Ausgangspunkt landet, also $s_{j,k} \circ s_{j,k} = \mathbb{1}$ gilt. Das kann einen an Addition in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ erinnern. Wir wollen das ganze also als eine geeignete Addition in einem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum betrachten. Würden wir das ganze nicht als Tabelle dieser Form, sondern als einen Vektor schreiben, also

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \end{pmatrix} \tag{4}$$

dann sieht man sofort die Vektorraumstruktur.[2] In diesem Fall könnten wir unsere Operation dann als Addition mit einem Vektor sehen. Beispielsweise wäre dann für einen Vektor $v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^6$:

$$s_{1,1}(v) = v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_{2,2}(v) = v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_{1,3}(v) = v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und der erste Schritt der obigen Sequenz sähe wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_{1,1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

[1] Ich glaube bisher waren in der Vorlesung noch keine Matrizen drangekommen. Sobald die definiert wurden, kann man sich die Aufgabe nochmal anschauen, dann sind manche Sachen klarer.

[2] Möchte man hier ganz genau sein, dann kann man auch zeigen, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{2\times 3}$ ein Vektorraum von Dimension 6 und damit isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^6$ ist.

Nachdem wir das ganze in eine Vektorraumstruktur überführt haben, können wir uns nun überlegen, dass für einen k-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt, dass

$$|V| = 2^k \tag{7}$$

da sich jeder Vektor $v \in V$ als

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \tag{8}$$

darstellen lässt. Die Darstellung ist eindeutig und für jedes Element $\lambda_j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt es zwei Möglichkeiten, also insgesamt k-mal 2 Möglichkeiten, macht 2^k insgesamt. Der Beweis selbst:

Wir betrachten die Menge der Tabellen dieser Form als den Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^6$, nur etwas anders geschrieben. Wir wollen die möglichen Konfigurationen, die wir durch Sequenzen der obigen Form erreichen können, als einen Unterraum $U \subseteq V$ beschreiben, dessen Dimension bestimmen und somit ausrechnen, wie viele Elemente der Unterraum hat. Wir definieren zuerst:

$$v_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Die gewünschten Sequenzen lassen sich durch Additionen mit folgenden Vektoren ausdrücken:

$$v_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Das heißt diese sechs Vektoren bilden ein Erzeugendensystem. Sie bilden allerdings keine Basis, da beispielsweise

$$v_{1,1} + v_{2,3} + v_{2,1} + v_{1,3} = v_1 + v_1 = v_0 \tag{12}$$

gilt, also sind sie nicht linear unabhängig. Wir können uns allerdings überlegen, dass

$$v_{1,1} + v_{2,3} = v_1 \in U \tag{13}$$

gilt und damit dann die Vektoren

$$u_1 := v_1 + v_{1,2} + v_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 := v_1 + v_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 := v_1 + v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ebenfalls alle in U liegen. Wir behaupten, dass $\{v_{1,1}, u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U ist. Dafür zeigen wir, dass die Menge sowohl linear unabhängig, als auch Erzeugendensystem von U ist. Zu ersterem: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass

$$\lambda_1 v_{1,1} + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = v_0 \tag{15}$$

gilt. Ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

die wir nun komponentenweise betrachten können. Die Komponenten der unteren, rechten Ecke ergeben nun

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0 \tag{17}$$

und damit folgt auch $\lambda_1 = 0$. Die Vektoren sind also linear unabhängig. Umgekehrt können wir uns überlegen, dass diese Vektoren auch ein Erzeugendensystem von U bilden, da sich jeder der Vektoren $v_{j,k}$ die wir oben definiert hatten, damit darstellen lässt. Da $\{v_{j,k}\}$ ein Erzeugendensystem ist, ist damit auch $\{v_{1,1}, u_1, u_2, u_3\}$ ein Erzeugendensystem, insgesamt also eine Basis. Da die Basis vier Elemente hat, hat der Vektorraum also $2^4 = 16$ Elemente.

Aufgabe 2
Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{18}$$

linear unabhängig?

Lösung:
Prinzipiell gibt es für diese Art von Aufgaben eine Unmenge von verschiedenen Herangehensweisen. Sehr zuverlässig und allgemein ist der Gauß-Algorithmus, den werden wir noch kennen lernen. Eine Möglichkeit wäre, ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten aufzustellen und dieses zu lösen. Man kann allerdings auch versuchen das Problem zu vereinfachen, indem man die Dimension des von $v_1, \ldots, v_4$ aufgespannten Vektorraums bestimmen. Ist die Dimension nicht 4, dann können die Vektoren nicht linear unabhängig in ihm sein. Ist die Dimension dagegen 4, müssen die Vektoren linear unabhängig sein.

Wir definieren uns den Vektor

$$u := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ziehen wir diesen von den Vektoren v_j ab, erhalten wir

$$v_1 - 2u = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 - u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 - 3u = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 - 2u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Wir müssen also nur noch die zweite und dritte Komponente erzeugen können um den gesamten Raum $< v_1, \ldots, v_4 >$ zu erzeugen.[a] Es gilt:

$$e_2 = \frac{1}{3}(v_3 - 3v_2) \tag{21}$$

und

$$e_3 = \frac{1}{3}((v_4 + e_2) - (v_1 + 5e_2)) \tag{22}$$

Wir haben also gezeigt, dass $e_2, e_3 \in < v_1, \ldots, v_4 >$ liegen und da $u = v_1 + 5e_2 - 2e_3$ gilt, liegt auch u in diesem Spann. Umgekehrt sehen wir auch, dass diese drei Vektoren den ganzen Unterraum erzeugen. Da sie offensichtlich linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis. Das heißt der von v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugte Unterraum ist dreidimensional, also kann es in ihm keine Menge von vier linear unabhängigen Vektoren geben. Das heißt v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig.

[a] Das ist nicht trivial. Es ist ja nicht garantiert, dass wir tatsächlich eine Darstellung von den Basisvektoren e_2, e_3 finden, die sich aus den v_i darstellen lässt, ohne Einfluss auf die erste oder vierte Komponente zu haben.

Diese Art von Beweis hat den Vorteil, dass sie wesentlich kürzer ist als ein Gleichungssystem und dass es weniger Möglichkeiten gibt, sich zu verrechnen. Auf der anderen Seite muss man natürlich die geeigneten Vektoren finden.

Aufgabe 3
Sei $u_i \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq i \leq k$, sodass für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ die Bilder $\overline{u_i}$ in dem Vektorraum $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ linear unabhängig sind. Zeige, dass die Vektoren u_i als Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^n$ aufgefasst, auch linear unabhängig sind.

Lösung:
Nochmal zur Erinnerung: $\mathbb{Z}^n$ ist über keinem Körper ein Vektorraum, also macht es auch keinen Sinn, in $\mathbb{Z}^n$ über lineare Unabhängigkeit im Sinne von Vektorräumen zu sprechen - man kann ein ähnliches Konzept definieren, aber das hat dann auch andere Eigenschaften/Implikationen. Und die lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$ impliziert nicht trivialerweise die lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{Q}$ (wir erinnern uns daran, dass die Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ in $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum linear unabhängig sind, während sie das in $\mathbb{R}$ offenbar nicht sind.)

Wir werden das ganze mit einem Widerspruchsbeweis zeigen: Dafür nehmen wir an, dass die zu zeigende Aussage (lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{Q}^n$) nicht gilt und zeigen dann, dass die Vektoren auch in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$ nicht linear unabhängig sein können. Der spannende Punkt ist hierbei, wie wir die lineare Abhängigkeit in $\mathbb{Q}^n$, die sich ja durch Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ ausdrückt, auf lineare Abhängigkeit in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$, die sich durch nichttriviale Koeffizienten in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ausdrückt, zeigen.

Angenommen, dass die Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ linear abhängig in $\mathbb{Q}$ ist, dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination, die Null ergibt. Es gibt also Elemente $\lambda_j = \frac{p_j}{q_j} \in \mathbb{Q}, j \in \{1, \ldots, k\}$ sodass

$$\frac{p_1}{q_1} u_1 + \ldots + \frac{p_k}{q_k} u_k = 0 \tag{23}$$

gilt. Um eine Linearkombination zu erhalten, deren Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen, multiplizieren wir die Gleichung nun mit dem Produkt der Nenner. Wir definieren

$$r_j = p_j \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k} q_l \in \mathbb{Z} \tag{24}$$

also lautet unsere Gleichung nun

$$r_1 u_1 + \ldots + r_k u_k = 0 \tag{25}$$

Würden wir diese Gleichung direkt so nach $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$ übertragen, könnten allerdings alle Koeffizienten r_j durch p teilbar sein, also müssen wir noch durch $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \forall j : p^n \mid r_j\}$ teilen. Da wir verlangen, dass für alle $j \in \{1, \ldots, k\} p^{n_0}$ ein Teiler von r_j ist, ist $s_j := \frac{r_j}{p^{n_0}}$ immer noch eine ganze Zahl. Wir verlangen allerdings auch, dass das für keinen Exponenten größer als n_0 gilt, also muss für mindestens einen der neuen Koeffizienten s_j gelten, dass er nicht mehr durch p teilbar ist. Das heißt aber auch, dass $s_j \neq 0$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt. Dann ist

$$s_1 u_1 + \ldots s_k u_k = 0 \tag{26}$$

eine nichttriviale Linearkombination in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$ die Null ergibt. Folglich sind die Vektoren nicht linear unabhängig. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, also müssen die Vektoren in $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sein.

Aufgabe 4
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien U, V Vektorräume über $\mathbb{K}$, sodass $\dim U = \dim V = n$. Sei weiter $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass f injektiv ist, genau dann, wenn f surjektiv ist.

Lösung:
Wir sollen eine Äquivalenz zeigen, also zeigen wir die beiden Implikationen einzeln. In dieser Aufgabe sehen wir, wie nützlich Basen sein können.

"$\Rightarrow$" Sei f eine injektive Abbildung. Dann schickt f eine linear unabhängige Menge auf eine linear unabhängige Menge. Das sehen wir so:

Seien $u_1, \ldots, u_k \in U$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Wir wollen zeigen, dass auch $f(u_1), \ldots, f(u_k)$ linear unabhängig sind. Wir stellen also für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_k f(u_k) = 0 \tag{27}$$

auf. Wir können die Linearität von f nutzen und erhalten

$$f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k) = 0 \tag{28}$$

Wir wissen, dass eine Abbildung genau dann injektiv ist, wenn ihr Kern trivial ist, das Nullelement in V also nur von dem Nullelement in U getroffen wird. In diesem Fall heißt das

$$\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_k u_k = 0 \tag{29}$$

da die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ aber per Annahme linear unabhängig sind, folgt daraus bereits $\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$ und damit sind auch $f(u_1), \ldots, f(u_k)$ linear unabhängig.

Wir wollen die Surjektivität zeigen, indem wir für einen Vektor $v \in V$ explizit ein Urbild konstruieren: Sei $u_1, \ldots, u_n$ nun eine Basis von U. Dann wird diese von f auf eine Menge linear unabhängiger Vektoren $f(u_1), \ldots, f(u_n) \in V$ geschickt. Da V die Dimension n hat, sind n linear unabhängige Vektoren aber bereits eine Basis. Also gibt es Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$v = \mu_1 f(u_1) + \ldots + \mu_n f(u_n) = f(\mu_1 u_1 + \ldots \mu_n u_n) \tag{30}$$

gilt. Also ist f surjektiv.

"$\Leftarrow$" Sei f eine surjektive Abbildung. Dann ist das Urbild von linear unabhängigen Vektoren wieder linear unabhängig. Das sehen wir so:

Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Da f eine surjektive Abbildung ist, gibt es für jeden dieser Vektoren mindestens ein $u_j \in U$, sodass $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : f(u_j) =$

v_j gilt. Wir wollen zeigen, dass die Urbilder linear unabhängig sind, also stellen wir für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \tag{31}$$

auf. Wir wenden nun auf beiden Seiten der Gleichung f an und erhalten:

$$0 = f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \ldots \lambda_k f(u_k) = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k \tag{32}$$

also eine Linearkombination in V die Null ergibt, folglich sind mit der linearen Unabhängigkeit der v_j alle Koeffizienten λ_j gleich Null und die u_j sind linear unabhängig.

Sei nun $v_1, \ldots v_n \in V$ eine Basis von V. Dann gibt es wieder entsprechende Urbilder $u_1, \ldots, u_n \in U$. Da diese linear unabhängig sind und U die Dimension n hat, müssen sie auch eine Basis bilden. Wir wollen die Trivialität des Kerns zeigen, also nehmen wir an, dass für ein $u \in U$ gilt, dass $f(u) = 0$. Dann gibt es Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$u = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n \tag{33}$$

Wir setzen das in $f(u) = 0$ ein und erhalten:

$$0 = f(\mu_1 u_1 + \ldots \mu_n u_n) = \mu_1 f(u_1) + \ldots + \mu_n f(u_n) = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \tag{34}$$

was aber heißt, dass wir eine Linearkombination von Basisvektoren gefunden haben, die 0 ergibt. Dann muss $\mu_1, \ldots, \mu_n = 0$ gelten und damit auch $u = 0$. Das heißt f ist injektiv.