Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 8

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Wir betrachten den Teilraum

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + 3x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4 \tag{1}$$

Finde eine Basis von U und eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$

Lösung:

Wir wiederholen zuerst Quotientenräume.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq V$ ein Unterraum. Dann ist

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\} := V/\sim \tag{2}$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\forall v, w \in V : v \sim w \Leftrightarrow \exists u \in U : v + u = w \tag{3}$$

der *Quotientenraum* oder *Faktorraum* von V nach U.

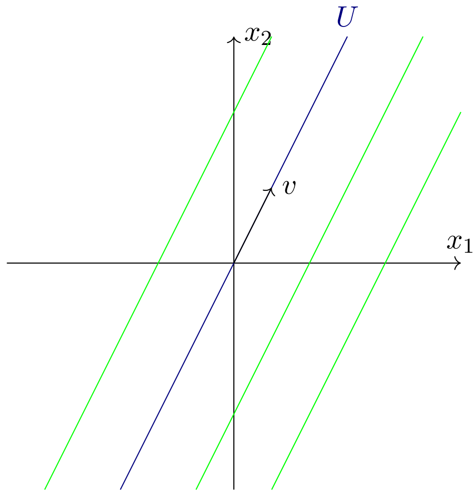
Wir fassen hier also alle Vektoren in V zusammen, die sich nur durch einen Vektor in U entscheiden.

Als Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $U =< v >$ der von einem Vektor erzeugte Unterraum. Die Äquivalenzklassen von V bestehen nun aus Vektoren, die auf einer Linie liegen, die in Richtung v gehen. Für $v = e_1 + 2e_2$ sähe das dann so aus, wie in diesem Bild[1] wobei die blaue[2] Linie den Raum U selbst darstellt und die grünen[3] Linien die einzelnen Äquivalenzklassen darstellen. Natürlich ist $U = 0 + U$ ebenfalls ein Element des Faktorraums. Wir sehen, dass die Äquivalenzklassen alle parallel zu U liegen. Wir sehen auch, dass wir die Menge der Äquivalenzklassen hier schon erschöpfend dadurch beschreiben können, dass wir ihren Schnittpunkt mit der x_1-Achse angeben, wir also einen 1-dimensionalen Vektorraum betrachten. Das liegt daran, dass $\dim(V) = 2$ und $\dim(U) = 1$ gilt. Im allgemeinen gilt

$$\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V) \tag{4}$$

Wir vereinbaren hier nun auch einmal den Begriff der Standardbasis:

[1] Das auf der nächsten Seite ist.
[2] dunklere
[3] helleren



Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, also isomorph zu $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine kanonische Basis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wir nennen diese Basis die *Standardbasis* und den Vektor e_j den *j-ten Standard-Basisvektor*[a]

[a] Bzw. auch *Einheitsbasis* und *Einheitsvektor*, wobei zumindest letzterer Begriff nicht eindeutig ist, da damit auch ganz allgemein ein Vektor der Länge 1 betrachtet werden kann. Ich würde also empfehlen, den Begriff Einheitsvektor nicht zu verwenden, wenn dann als "kanonischer Einheitsvektor".

Dass diese Basis eine Basis ist, sieht man sofort, da sie aus n linear unabhängigen Vektoren besteht. Zur Lösung selbst:

Wir wollen zuerst eine Basis für den Raum U finden. Wir sehen, dass die beiden Bedingungen äquivalent sind zu

$$x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 \tag{6}$$
$$x_3 + 3x_4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -3x_4 \tag{7}$$

und wir somit zwei Bedingungen an unsere Variablen haben, die wir dadurch darstellen können, dass wir als Erzeugendensystem

$$u_1 = (2, -1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 0, 3, -1) \tag{8}$$

wählen. Die beiden Vektoren sind offenbar linear unabhängig, also sind sie auch eine Basis. Da der Vektorraum zweidimensional ist, können wir daraus bereits schließen, dass R^4/U ebenfalls ein zweidimensionaler Raum ist. Wenn wir die Basis von U zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen, kriegen wir diese beiden Vektoren durch Projektion, wie folgt: Wir ergänzen zuerst unsere Basis zu

$$u_1, u_2, e_1, e_3 \tag{9}$$

Da diese Vektoren weiterhin offensichtlich linear unabhängig sind, sind sie auch eine Basis von $\mathbb{R}^4$ (der 4-dimensional ist). Wir projizieren diese Basis nun per kanonischer Projektion:[a]

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/U \tag{10}$$

$$v \mapsto v + U \tag{11}$$

und erhalten dann die Vektoren

$$\pi(u_1) = 0 + U, \quad \pi(u_2) = 0 + U, \quad \pi(e_1) = e_1 + U, \quad \pi(e_3) = e_3 + U \tag{12}$$

die per Konstruktion in $\mathbb{R}^4/U$ liegen. Zwei der Vektoren entsprechen dem neutralen Element in $\mathbb{R}^4/U$, also betrachten wir nur $e_1 + U, e_3 + U$. Wir sehen, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind, also haben wir zwei linear unabhängige Vektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum gefunden, also sind sie eine Basis. Damit sind wir fertig.

[a] Wieso ist diese Abbildung wohldefiniert?

Wir haben in dieser Lösung den Weg über die Projektion genommen, der etwas umständlich erscheint. Wenn man sie auch so sieht, kann man natürlich auch direkt $e_1 + U, e_3 + U$ wählen und prüfen, ob sie eine Basis sind. Es kann aber sein, dass einem nicht direkt solche Vektoren auffallen, dann kann man immer die Methode mit der Projektion probieren.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum. Sei f eine Linearform auf V. Zeige, dass f genau dann die Linearkombination von Linearformen $f_1, \ldots, f_k$ ist, wenn

$$\bigcap_{j=1}^{k} \ker(f_j) \subseteq \ker(f) \tag{13}$$

gilt.

Lösung:

Für diese Aufgabe brauchen wir ein paar Dinge. Zuerst einmal wollen wir die notwendigen Definitionen wiederholen:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum. Dann nennen wir eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$$f : V \to \mathbb{K} \tag{14}$$

eine *Linearform* oder auch *lineares Funktional*[a]

Wir definieren weiter den *Dualraum* zu V als die Menge aller Linearformen auf V, also

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) := \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear}\} \tag{15}$$

[a] Ganz allgemein heißt eine Abbildung $L : U \to \mathbb{K}$ von einer Teilmenge $U \subseteq V$ in den zugrundeliegenden Körper *Funktional*. Die Abbildung muss also nicht linear sein. Teilweise wird aber auch einfach der Term Funktional verwendet, wenn man eigentlich lineare Funktionale meint, hier ist die Literatur nicht eindeutig. Man sollte also auch hier bei jedem Autor überprüfen, wie genau er den Term Funktional verwendet.

Da $\mathbb{K}$ auf natürliche Art und Weise ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, sind die Linearformen auf V natürlich genau die Vektorraumhomomorphismen von V nach $\mathbb{K}$. Dementsprechend auch die Schreibweise von V^* als $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$. Dualräume sind ein eher abstraktes Konzept und ihre Bedeutung erschließt sich häufig nicht direkt (zumindest mir ging es so), aber es lohnt sich, sie zu verstehen. Wir wollen das ganze mit einem Beispiel veranschaulichen:

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$. Lineare Abbildungen in den Körper $\mathbb{R}$ gibt es viele, beispielsweise

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{16}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{17}$$

hier werden einfach nur alle Koeffizienten des Vektors aufsummiert. Wir können das verallgemeinern indem wir die Summe mit beliebigen Gewichten versehen. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, dann definieren wir die Abbildung

$$L_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{18}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \tag{19}$$

die offenbar immer noch linear ist. Wir sehen aber auch, dass sich eine Möglichkeit bietet, das ganz anders zu schreiben. Sei dazu ein fester Vektor $v = (v_1, \dots, v_n)$ gegeben, dann gilt

$$L_\lambda(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle \tag{20}$$

wobei wir mit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt meinen. Wir haben also einen Weg gefunden, jedes lineare Funktional dieser Form durch einen Vektor zu beschreiben. Umgekehrt sei nun $u = (u_1, \dots, u_n)$ ein beliebiger Vektor. Dann können wir durch

$$L_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{21}$$

$$v \mapsto \langle u, v \rangle \tag{22}$$

ein lineares Funktional definieren. Eine Möglichkeit die Linearformen auf $\mathbb{R}^n$ darzustellen ist also, sie als die Standardskalarmultiplikation mit einem anderen Vektor zu schreiben.

Das hier war kein Beweis in irgendeiner Form; Ein strenger Beweis, dass $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ gilt, folgt vermutlich in der Vorlesung.

Wir werden in diesem Beweis weiterhin noch den *Homomorphiesatz für Vektorräume* verwenden:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Sei $\varphi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus und sei $\pi : V \to V/\ker(\varphi)$ die Projektion auf den Kern von φ. Dann gibt es einen eindeutigen, injektiven Homomorphismus $\psi : V/\ker(\varphi) \to W$, sodass $\varphi = \psi \circ \pi$.

Wir können diesen Satz auch durch folgendes, kommutatives Diagramm darstellen, wobei die gepunktete Linie anzeigt, dass dieser Homomorphismus nicht gegeben ist, sondern die Existenz genau durch diesen Satz garantiert wird.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & W \\ V/\ker(\varphi) \arrow[ur, dotted, hook, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Teil des Satzes ist, dass $\varphi = \psi \circ \pi$ gilt, also gilt insbesondere, dass φ und $\psi \circ \pi$ das gleiche Bild haben. Da π aber surjektiv ist, sehen wir, dass dann auch ψ und φ das gleiche Bild haben. Da ψ laut Satz injektiv ist, induziert es damit einen Isomorphismus

$$\hat{\psi} : V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{im}(\varphi) \tag{23}$$

Gilt, dass φ bereits surjektiv ist, ist mit der gleichen Argumentation ψ bereits ein Isomorphismus und wir müssen nichts mehr induzieren.

Man beachte, dass es den Homomorphiesatz in gleicher Art und Weise auch für Gruppen, Ringe, Körper, etc. gibt. Nun zum Beweis selbst:

Wir müssen eine Äquivalenz zeigen, wir zeigen zwei Implikationen:

"$\Rightarrow$" Angenommen f ist eine solche Linearkombination, dann gibt es Linearformen $f_1, \dots, f_k$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, sodass

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k \tag{24}$$

Sei nun $x \in \bigcup_{j=1}^k \ker(f_k) \subseteq V$, dann gilt:

$$f(x) = \lambda_1 \underbrace{f_1(x)}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{f_k(x)}_{=0} = 0 \tag{25}$$

also gilt auch $x \in \ker(f)$ und diese Richtung ist gezeigt.

"$\Leftarrow$" Wir nehmen nun an, dass $\bigcup_{j=1}^k \ker(f_k) \subseteq \ker(f)$ gilt. Wir können nicht direkt zeigen, dass f eine Linearkombination ist, sondern müssen einen Umweg gehen um die genaue Linearkombination zu konstruieren. Dafür sei zuerst

$$F : V \to \mathbb{K}^k \tag{26}$$
$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)) \tag{27}$$

eine Abbildung. Da die f_j jeweils Homomorphismen sind, ist auch F ein Homomorphismus, beispielsweise gilt für $x, y \in V$, dass

$$F(x+y) = (f_1(x+y), \dots, f_k(x+y)) = (f_1(x) + f_1(y), \dots, f_k(x) + f_k(y)) = F(x) + F(y) \tag{28}$$

Homogenität ist ähnlich zu zeigen und die Abbildung ist klarerweise wohldefiniert, da alle f_j nach $\mathbb{K}$ abbilden. Wenn wir nun eine lineare Abbildung $\Gamma : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ finden, sodass $\Gamma \circ F = f$, können wir f als Linearkombination der Koeffizienten $F(x)$, also als Linearkombination von $f_j(x)$ darstellen.

Nachdem nun F ein Vektorraumhomomorphismus ist, können wir den Homomorphiesatz anwenden und erhalten so einen Isomorphismus

$$\psi : V/\ker(F) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{im}(F) \tag{29}$$

Außerdem sehen wir, dass für ein $x \in V$ gilt, dass

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x), \dots, f_k(x)) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{k} \ker(f_j) \tag{30}$$

also gilt $\ker(F) = \bigcap_{j=1}^{k} \ker(f_j) \subseteq \ker(f)$. Wir wählen nun noch die Projektion

$$\pi : V \to V/\ker(F) \simeq \mathsf{im}(F) \tag{31}$$
$$x \mapsto x + \ker(F) \tag{32}$$

und erhalten $\psi \circ \pi = F$. Natürlich ist ψ in diesem Fall ein Isomorphismus, da F surjektiv auf sein eigenes Bild ist. Das heißt aber auch, dass es eine inverse Abbildung ψ^{-1} gibt und wir erhalten die Gleichheit

$$\pi = \psi^{-1} \circ F \tag{33}$$

Wir beschreiben die von f induzierte Abbildung:

$$f' : V/\ker(F) \to \mathbb{K} \tag{34}$$
$$x + \ker(F) \mapsto f(x) \tag{35}$$

diese ist eine Linearform, da f eine Linearform ist. Man beachte, dass wir sie aufgrund des Homomorphiesatzes auch als eine Abbildung $f' \circ \psi^{-1} : \mathsf{im}(F) \to \mathbb{K}$ beschreiben könnten.

Wir wählen nun eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_l\}$ von $\mathsf{im}(F)$. Da $\mathsf{im}(F) \subseteq \mathbb{K}^k$ gilt, sind die Vektoren dort linear unabhängig und wir können sie zu einer Basis $\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_k\}$ von $\mathbb{K}^k$ fortsetzen. Das erlaubt es uns die folgende Abbildung zu definieren:

$$\hat{f} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K} \tag{36}$$
$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k \mapsto \alpha_1 f(b_1) + \ldots + \alpha_l f(b_l) \tag{37}$$

das ist offenbar immer noch eine Linearform. Sie wirkt exakt, wie f auf alle Vektoren, die in $\mathsf{im}(F)$ enthalten sind, bildet aber alle weiteren Anteile auf 0 ab. Diese Eigenschaft geht nicht verloren, wenn wir $\hat{f}$ auf $\mathsf{im}(F)$ einschränken. f' bildet alle Elemente aus $V/\ker(F)$ genau wie f ab. Wir erhalten mit dem Inversen des Isomorphismus ψ dann

$$\hat{f}|_{\mathsf{im}(F)} = f' \circ \psi^{-1} \tag{38}$$

Wir haben jetzt alle Einzelteile zusammen und berechnen

$$\hat{f} \circ F = \hat{f}|_{\mathsf{im}(F)} \circ F = f' \circ \psi^{-1} \circ F = f' \circ \pi = f \tag{39}$$

wobei der letzte Schritt gilt, da f' per Definition auf allen Elementen von $V/\ker(F)$ genau wirkt, wie f.

Die oben erwähnte Abbildung Γ ist also nun $\hat{f}$. Wir wollen nun noch zeigen, wieso das tatsächlich bedeutet, dass f eine Linearkombination der f_j ist. Sei nun $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und sei weiter $e_1, \ldots, e_k$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^k$. Dafür überlegen wir uns zuerst, dass für ein beliebiges Funktional $L : V \to \mathbb{K}$ gilt (mit geeigneten $\mu_j \in \mathbb{K}$):

$$L(v) = L(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = \mu_1 L(v_1) + \ldots + \mu_n L(v_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j L(v_j) \tag{40}$$

und dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}
f(v) &= (\hat{f} \circ F)(v) && (41)\\
&= \hat{f}(f_1(v), \ldots, f_k(v)) && (42)\\
&= \hat{f}\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_1(v_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_k(v_j)\right) && (43)\\
&= \hat{f}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_1(v_j)\right) e_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_k(v_j)\right) e_k\right) && (44)\\
&= \sum_{l=1}^{k} \hat{f}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_l(v_j)\right) e_l\right) && (45)\\
&= \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_l(v_j) \hat{f}(e_l) && (46)\\
&= \sum_{l=1}^{k} \hat{f}(e_l) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_l(v_j)\right)}_{=f_l(v)} && (47)\\
&= \sum_{l=1}^{k} \hat{f}(e_l) f_l(v) && (48)\\
&= \left(\sum_{l=1}^{k} \hat{f}(e_l) f_l\right)(v) && (49)
\end{aligned}$$

also ist f tatsächlich eine Linearkombination der f_j mit Koeffizienten $\lambda_j = \hat{f}(e_j)$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien W, V_1, V_2 Vektorräume über $\mathbb{K}$, sodass $W = V_1 \oplus V_2$. Sei nun $U \leq W$ ein 1-dimensionaler Unterraum, sodass $U \cap V_1 = U \cap V_2 = \{0\}$ gilt. Bestimme die Dimension von $(V_1 + U) \cap (V_2 + U)$.

Lösung:

Wir definieren die Summe und direkte Summe von Vektorräumen:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei W ein Vektorräume über $\mathbb{K}$ und seien $V_1, V_2 \leq W$ Unterräume. Dann definieren wir die *Summe*

$$V_1 + V_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\} \tag{50}$$

die Summe von zwei Unterräumen ist erneut ein Unterraum. Wir definieren nun die direkte Summe:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei W ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $U, V_1, V_2 \leq W$ Unterräume. Dann ist U die *direkte Summe von V_1 und V_2*, wenn gilt, dass

$$U = V_1 + V_2 \tag{51}$$
$$V_1 \cap V_2 = \{0\} \tag{52}$$

und schreiben in diesem Fall $U = V_1 \oplus V_2$.

es gilt also, dass jede direkte Summe von Untervektorräumen auch die Summe von Untervektorräumen ist, umgekehrt aber nicht jede Summe direkt ist. Es gilt auch folgender Satz:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei W ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $V_1, V_2 \leq W$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Summe $V_1 + V_2$ ist direkt (also $V_1 \cap V_2 = \{0\}$).
- Jeder Vektor aus $V_1 + V_2$ hat eine *eindeutige* Darstellung durch Vektoren in V_1, V_2.

Mit der zweiten Aussage meinen wir folgendes: Jeder Vektor $v \in V_1 + V_2$ kann per Definition als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$ geschrieben werden. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn folgendes gilt: Gibt es Vektoren $u_1' \in V_1, u_2' \in V_2$, sodass $v = u_1' + u_2'$ gilt, dann ist $u_1' = u_1$ und $u_2' = u_2$. Wir haben also nun zwei Methoden um zu überprüfen ob die direkte Summe von zwei Vektorräumen direkt ist.

Für direkte Summen hatten wir in der Vorlesung die Dimensionsformel gezeigt:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei W ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $V_1, V_2 \leq W$ Unterräume, sodass $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Dann gilt:

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) \tag{53}$$

In der Praxis werden wir für nichtkonkrete Räume üblicherweise nicht mehr erwähnen, dass V_1, V_2 Unterräume von W sind, sondern einfach nur von einer direkten Summe von V_1 und V_2 sprechen.

Es gibt noch die Variante der Dimensionsformel für allgemeine Summen, diese werden wir im Beweis verwenden. Da sie noch nicht gezeigt wurde, werden wir sie als Teil der Lösung dieser Aufgabe beweisen müssen:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $V_1, V_2 \leq W$ Unterräume. Dann gilt:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) \tag{54}$$

Wie wir sehen, ist die Dimensionsformel für direkte Summen also nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Aussage. Wir wollen allgemeine Aussage zeigen, dafür benötigen wir noch eine weitere Aussage, den sogenannten Rangsatz[4] (wurde in der Vorlesung bewiesen):

[4] Er heißt manchmal auch Dimensionssatz. Aber die Begriffe Dimensionsformel und Dimensionssatz werden in der Literatur oft durcheinander geworfen um entweder die eine, oder die andere der hier verwendeten Aussagen zu bezeichnen. Am besten stellt man klar, was man meint.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim(\mathsf{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) \tag{55}$$

Wir zeigen nun die Aufgabe:

1. Zuerst die allgemeinere Form der Dimensionsformel: Wir betrachten hierfür einen Raum W mit Unterräumen V_1, V_2. Wir wissen, dass der Schnitt zweier Unterräume wieder ein Unterraum ist und wir deswegen den Faktorraum $W/(V_1 \cap V_2)$ definieren können. Dann können wir folgende Abbildungen definieren: Für $j \in \{1, 2\}$

$$\pi_j : V_j \to W/(V_1 \cap V_2) \tag{56}$$
$$v \mapsto v + (V_1 \cap V_2) \tag{57}$$

sowie

$$\pi : V_1 + V_2 \to W/(V_1 \cap V_2) \tag{58}$$
$$v \mapsto v + (V_1 \cap V_2) \tag{59}$$

also jeweils die Projektionen verschiedener Räume in den gleichen Faktorraum. Da diese Abbildungen Homomorphismen sind, können wir jeweils den Rangsatz anwenden und erhalten

$$\dim(V_j) = \dim(\mathsf{im}(\pi_j)) + \dim(\ker(\pi_j)) \tag{60}$$
$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(\mathsf{im}(\pi)) + \dim(\ker(\pi)) \tag{61}$$

Wir überlegen uns für diese Terme nun noch, was sie jeweils sind. Es gilt

$$\ker(\pi_j) = \ker(\pi) = V_1 \cap V_2 \tag{62}$$

Beispielhaft für π_1 gilt nämlich: Liegt $v \in \ker(\pi_j)$, dann ist $\pi_1(v) = 0 + (V_1 \cap V_2)$, aber das heißt, dass $v - 0 = v$ in $(V_1 \cap V_2)$ liegen muss, womit wir eine Inklusion gezeigt haben. Sei umgekehrt $v \in V_1 \cap V_2$, dann liegt v auf jeden Fall in V_1, also im Definitionsbereich von π_1 und da es offenbar auf 0 abgebildet wird, auch im Kern von π.

Auf der anderen Seite gilt, dass

$$\mathsf{im}(\pi_1) + \mathsf{im}(\pi_2) = \mathsf{im}(\pi) \tag{63}$$

denn

$$\mathsf{im}(\pi_j) = V_j/(V_1 \cap V_2) \tag{64}$$
$$\mathsf{im}(\pi) = (V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2) \tag{65}$$

und hier sehen wir die Gleichheit direkt: Sei $v \in \mathsf{im}(\pi_1) + \mathsf{im}(\pi_2)$, dann gibt es $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ sodass $v = v_1 + (V_1 \cap V_2) + v_2 + (V_1 \cap V_2) = v_1 + v_2 \in (V_1 \cap V_2)$, aber das ist ein Element von $(V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2)$ und umgekehrt genauso. Nachdem die beiden Vektorräume gleich sind, müssen auch ihre Dimensionen gleich sein. Wenn wir nun die erste Gleichung in Gleichung 60 für beide Projektionen addieren und danach die Gleichung für π subtrahieren, erhalten wir:

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) \tag{66}$$
$$= \dim(\mathsf{im}(\pi_1)) + \dim(\ker(\pi_1)) + \dim(\mathsf{im}(\pi_1)) + \dim(\ker(\pi_1)) - \dim(\mathsf{im}(\pi)) - \dim(\ker(\pi)) \tag{67}$$
$$= \underbrace{\dim(\mathsf{im}(\pi_1)) + \dim(\mathsf{im}(\pi_2)) - \dim(\mathsf{im}(\pi))}_{=0} + \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) \tag{68}$$
$$= \dim(V_1 \cap V_2) \tag{69}$$

Wenn wir diese Gleichung umformen, erhalten wir die allgemeine Dimensionsformel.

2. Nun die Aufgabe an sich: Wir schreiben $n = \dim(W), k_j = \dim(V_j)$. Da W die direkte Summe von V_1 und V_2 ist, sehen wir mit der Dimensionsformel, dass $n = k_1 + k_2$ gilt. Da außerdem der Schnitt von V_j und U trivial ist, ergibt sich mit der Dimensionsformel auch $\dim(V_j + U) = k_j + 1$. Es gilt außerdem: Da W bereits die Summe von V_1 und V_2 ist, ist W auch Summe von $V_1 + V_2 + U$. Wir setzen das nun in die allgemeine Dimensionsformel ein und erhalten:

$$n = \dim(W) = \dim(V_1 + U) + \dim(V_2 + U) - \dim((V_1 + U) \cap (V_2 + U)) \tag{70}$$
$$= k_1 + 1 + k_2 + 1 - \dim((V_1 + U) \cap (V_2 + U)) \tag{71}$$

und nach Umstellen der Gleichung erhalten wir $\dim((V_1 + U) \cap (V_2 + U)) = 2$.

Aufgabe 4
Sei p eine Primzahl und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Seien $u_1, \ldots, u_k \in V$ linear unabhängige Vektoren. Wie viele Elemente hat der Unterraum $U =< u_1, \ldots, u_k >$?

2. Wie viele Basen gibt es für V?

Lösung:
Diese Aufgabe ist in erster Linie Kombinatorik:

1. Allgemein gilt: Ist W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $w_1, \ldots, w_m$, dann hat jeder Vektor $w \in W$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren und jede Linearkombination der Basisvektoren liegt in W. Da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein endlicher Körper ist, gibt es auch nur endlich viele Linearkombinationen. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ sind linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von U, also sind sie eine Basis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dann ist

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k \tag{72}$$

ein Element von U und alle möglichen Besetzungen von λ_j entsprechen allen möglichen Vektoren von U. Wir können für jeden der Koeffizienten p mögliche Werte wählen und haben k Koeffizienten, also gibt es insgesamt p^k Möglichkeiten. Da die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis bilden, hat U also p^k Elemente.

2. Wir können uns die Basen von V iterativ aufbauen. Da $\dim(V) = n$ gilt, müssen wir n Vek-

toren $v_1, \dots, v_n$ wählen und uns bei jedem einzelnen überlegen, wie viele Wahlmöglichkeiten wir haben. Wir wählen den k-ten Vektor jeweils linear unabhängig von den $k-1$ vorher gewählten Vektoren. Gilt $k \leq n$, dann ist die Existenz eines linear unabhängigen Vektors garantiert. Haben wir dann n linear unabhängige Vektoren gewählt, müssen sie eine Basis sein. Es gilt:

- v_1 Als ersten Basisvektor können wir jeden beliebigen Vektor wählen, außer dem 0-Vektor, der nie Teil einer Basis sein kann. Wir haben in der ersten Aufgabe gesehen, dass ein n-dimensionaler Unterraum von V insgesamt p^n Elemente hat; Das heißt wir haben für den ersten Vektor $p^n - 1$ Möglichkeiten.
- v_2 Der zweite Basisvektor kann beliebig gewählt werden, solange er linear unabhängig zu v_1 ist. Das heißt alle Vektoren, die nicht im Spann von v_1 liegen, sind in Ordnung. Der Spann von v_1 ist ein 1-dimensionaler Vektorraum, also hat er p Elemente, alle anderen sind für den Vektor geeignet. Das heißt für v_2 haben wir $p^n - p$ Möglichkeiten.
- v_k Allgemein für den k-ten Vektor gilt nun, dass wir ihn beliebig wählen können, solange er linear unabhängig von $v_1, \dots, v_{k-1}$ ist. Das heißt er darf nicht im Spann dieser $k-1$ Vektoren liegen. Dieser Spann ist ein $k-1$-dimensionaler Vektorraum, hat also laut der ersten Aufgabe p^{k-1} Elemente, das heißt für den k-ten Vektor haben wir $p^n - p^{k-1}$ Wahlmöglichkeiten. Das gilt nun für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Wir multiplizieren nun die Anzahlen der Möglichkeiten und erhalten

$$|\{\text{Basis von } V\}| = (p^n - 1)(p^n - p)\dots(p^n - p^{n-2}) = \prod_{j=1}^{n}(p^n - p^{j-1}) \tag{73}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob wir geordnete, oder ungeordnete Basen betrachten, das heißt ob die Reihenfolge unserer Vektoren wichtig ist. Wenn wir sagen, dass die Reihenfolge eine Bedeutung spielt, sind wir fertig. Wenn wir allerdings sagen, dass es bei einer Basis nur auf die Elemente ankommt (also z.B. (e_1, e_2) und (e_2, e_1) die gleiche Basis sind), dann müssen wir noch durch die Anzahl der Permutationen teilen. Es gibt $n!$ Möglichkeiten n Elemente zu vertauschen, das heißt in diesem Fall korrigieren wir unser Ergebnis zu

$$|\{\text{Basis von } V\}| = \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}(p^n - p^{j-1}) \tag{74}$$