

Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 9

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Basis $b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (2, -1, 1), b_3 = (-1, 1, 3)$ von $V = \mathbb{R}^3$. Bestimme die duale Basis von V^* .

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definition einer dualen Basis:

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einer Basis v_1, \dots, v_n . Die duale Basis ist eine Menge linearer Funktionale $d_1, \dots, d_n \in V^*$ sodass

$$d_j(v_k) = \delta_{j,k}$$

Insbesondere ist die duale Basis eine Basis des Dualraums. Es bietet sich an die duale Basis der Standardbasis eines Vektorraums als die duale Standardbasis zu bezeichnen und auch als kanonische Basis zu verwenden. Wir schreiben also $f_1, \dots, f_n \in (\mathbb{K}^n)^*$ für Elemente f_j , sodass

$$f_j(e_k) = \delta_{j,k}$$

wobei e_k die Standardbasisvektoren von \mathbb{K}^n sind. Der Vorteil einer so ausgezeichneten Basis ist, dass man eine "kanonische Schreibweise" für Dualvektoren hat. Damit sind Rechnungen relativ simpel: Sei $v = (3, 1, 5) = 3e_1 + e_2 + 5e_3 \in \mathbb{R}^3$ und seien $d_1 = 2f_1 - 4f_2 + \frac{1}{2}f_3, d_2 = f_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$. Wir wollen überprüfen, ob diese Dualvektoren als duale Basisvektoren in Frage kommen. Wir bestimmen:

$$\begin{aligned} d_1(v) &= (2f_1 - 4f_2 + \frac{1}{2}f_3)(v) \\ &= (2f_1(3e_1 + e_2 + 5e_3) - 4f_2(3e_1 + e_2 + 5e_3) + \frac{1}{2}f_3(3e_1 + e_2 + 5e_3)) \\ &= 6 - 4 + \frac{5}{2} \neq 1 \\ d_2(v) &= f_2(3e_1 + e_2 + 5e_3) = 1 \end{aligned}$$

sehen also, dass d_1 als dualer Basisvektor nicht in Frage kommt, d_2 aber prinzipiell schon, diesen können wir also nun mit den beiden anderen Basisvektoren testen. Da für endlichdimensionale Räume gilt, dass $V \simeq V^*$, können wir das auch einfacher schreiben. Wir notieren $d_1 = (2, -4, \frac{1}{2}), d_2 = (0, 1, 0)$ und verwenden die Schreibweise als Skalarprodukt, die erste Rechnung wäre also $d_1(v) = \langle d_1, v \rangle = \dots \neq 1$.

Es gibt hier zwei Lösungen. Die erste verwendet keine Methoden zur Invertierung von Matrizen, da das zum Zeitpunkt der Herausgabe des Tutoriumsblatt noch nicht in der Vorlesung drangekommen war. Die zweite basiert auf dem Invertieren von Matrizen (Die erste ist für die Klausur denke ich nicht von Bedeutung, da man dann Matrizen invertieren darf.). Ohne Invertierung:

Wir wollen Vektoren d_1, d_2, d_3 finden, die die Bedingung $d_j(b_k) = \delta_{j,k}$ erfüllen. Dafür müssen wir im Endeffekt neun Gleichungen mit neun Unbekannten lösen. Auf direkte Art und Weise wäre das zu viel Arbeit, also versuchen wir immer mehrere Gleichungen auf einmal zu lösen.

Es gilt $d_2(b_1) = d_3(b_1) = 0$, also können wir eine gemeinsame Bedingung an d_2 und d_3 formulieren, indem wir diese Gleichung lösen. Für einen Dualvektor $d \in (\mathbb{R}^3)^*$ gilt:

$$d(b_1) = 0 \Leftrightarrow d(e_1) + d(e_3) = 0 \Rightarrow d(e_1) = -d(e_3)$$

Der Vektor d kann durch die Dualbasis f_1, f_2, f_3 dargestellt werden, also $d = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Es muss gelten, dass

$$\lambda_1 f_1(e_1) + \lambda_2 f_2(e_1) + \lambda_3 f_3(e_1) = d(e_1) = -d(e_3) = -\lambda_1 f_1(e_3) - \lambda_2 f_2(e_3) - \lambda_3 f_3(e_3)$$

gilt. Da $f_j(e_k) = \delta_{j,k}$ gilt, ergibt das $\lambda_1 = -\lambda_3$, also sind die Vektoren d_2, d_3 von der Form $a(f_1 - f_3) + b f_2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Analog gilt

$$d(b_2) = 0 \Leftrightarrow 2d(e_1) - d(e_2) + d(e_3) = 0 \Rightarrow d(e_3) = d(e_2) - 2d(e_1)$$

also sind die Vektoren d_1, d_3 von der Form $a f_1 + b f_2 + (b - 2a) f_3$. Und drittens

$$d(b_3) = 0 \Leftrightarrow -d(e_1) + d(e_2) + 3d(e_3) = 0 \Rightarrow d(e_3) = \frac{1}{3}(d(e_1) - d(e_2))$$

das heißt die Vektoren d_1, d_2 sind von der Form $a f_1 + b f_2 + \frac{1}{3}(a - b) f_3$.

Wir sehen nun schon, dass wir für jeden Vektor zwei Gleichungen haben. Jede dieser Gleichungen hängt von zwei Variablen ab, eine davon können wir jeweils durch die zweite Gleichung eines Dualvektors ersetzen. Das machen wir wie folgt:

Der Vektor $d_1 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ muss folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_2 - 2\lambda_1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

Eine der beiden Variablen bleibt damit frei. Wir setzen diese beiden Bedingungen gleich und lösen dann

$$\lambda_2 - 2\lambda_1 = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{7}{4}\lambda_1$$

also gilt, wenn wir das ganze als Koeffizientenvektor schreiben $d_1 = \lambda_1(1, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4})$.

Auf die gleiche Art und Weise folgern wir für $d_2 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3$, dass

$$\frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_2) = -\mu_1 \Rightarrow \mu_2 = 4\mu_1$$

in Koeffizientenschreibweise also $d_2 = \mu_1(1, 4, -1)$ und für $d_3 = \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \nu_3 f_3$, dass

$$-\nu_1 = \nu_2 - 2\nu_1 \Rightarrow \nu_2 = \nu_1$$

Das heißt $d_3 = \nu_1(1, 1, -1)$.

Als nächstes wollen wir die Vektoren noch normieren. Wir wissen zwar, dass $d_1(b_2) = d_1(b_3) = 0$ gilt, aber müssen noch λ_1 so bestimmen, dass $d_1(b_1) = 1$ gilt. Also

$$1 = d_1(b_1) = \lambda_1 \langle (1, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4}), (1, 0, 1) \rangle = \frac{3}{4} \lambda_1$$

also folgern wir $\lambda_1 = \frac{4}{3}$. Wir verfahren analog mit den anderen Dualvektoren und erhalten

$$1 = d_2(b_2) = \mu_1 \langle (1, 4, -1), (2, -1, 1) \rangle = -3\mu_1$$

also $\mu_1 = -\frac{1}{3}$ und zuletzt

$$1 = d_3(b_3) = \nu_1 \langle (1, 1, -1), (-1, 1, 3) \rangle = -3\nu_1$$

also $\nu_1 = -\frac{1}{3}$ und unsere Dualbasis lautet

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{4}{3}f_1 + \frac{7}{3}f_2 - \frac{1}{3}f_3 = \frac{1}{3}(4, 7, -1) \\ d_2 &= -\frac{1}{3}f_1 - \frac{4}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3 = \frac{1}{3}(-1, -4, 1) \\ d_3 &= -\frac{1}{3}f_1 - \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3 = \frac{1}{3}(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

Das ist eine lange und umständliche Rechnung, die wir nicht jedesmal explizit durchführen wollen, wenn wir eine duale Basis bestimmen. Wir überlegen uns also folgendes:

Wir haben drei Gleichungen, die wir gleichzeitig lösen wollen. Gleichungen können wir mit dem Gauß-Algorithmus sehr viel bequemer lösen. Also schreiben wir uns die Gleichungssysteme auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Dabei gibt uns das j -te Gleichungssystem die Koeffizienten für den j -ten Dualvektor. Da alle drei Gleichungssysteme die gleiche Koeffizientenmatrix haben, können wir diese simultan lösen. Wir sehen dann auch direkt, dass das Problem eine Dualbasis zu lösen äquivalent dazu ist, eine Matrix zu invertieren. Die Lösung sieht nun so aus:

Wir wollen die duale Basis zu b_1, b_2, b_3 finden. Dazu können wir die drei Vektoren nebeneinander schreiben und erhalten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die duale Basis zu finden ist äquivalent dazu, diese Matrix zu invertieren. Wir bestimmen mit dem

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III-I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{III-II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{II} - \frac{1}{3}\text{III} \\ \text{I} + \frac{1}{3}\text{III} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\text{I} + 2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{II} \cdot (-1) \\ \text{III} \cdot \frac{1}{3} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Die Lösung können wir nun als Zeilenvektoren in der rechten Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen. Es gilt also

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{1}{3}(4, 7, -1) \\
 d_2 &= \frac{1}{3}(-1, -4, 1) \\
 d_3 &= \frac{1}{3}(-1, -1, 1)
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Lösung sehr viel schneller zu finden ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Basis $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (1, 1, 1)$, $b_3 = (2, 1, 1)$ von \mathbb{R}^3 . Finde die Basiswechselmatrix von der Standardbasis in diese Basis.

Lösung:

Wir definieren eine Basiswechselmatrix:

Sei \mathbb{K}^n ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und seien $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basen von V . Wir definieren die *Basiswechselmatrix von V nach B* als eine Matrix $T_{B,V}$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ gegeben, dann gilt

$$T_{B,V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

wobei gilt, dass $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$.

Man beachte hierbei, dass eine Darstellung wie $(1, 2, 3)$ einen Vektor nur dann wirklich bestimmt, wenn angegeben wird, in welcher Basis diese Darstellung ist. Angenommen es gilt $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, dann wäre das $v = (1, 2, 3)$ in der Standardbasis. Wir können aber für den Vektorraum auch die Basis

$$b_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$b_2 = e_2 + e_3$$

$$b_3 = -e_3$$

wählen. Dann gilt $v = b_1 + b_2 - b_3$, also $v = (1, 1, -1)$ in der B -Basis. Obwohl diese Vektoren also unterschiedliche Einträge haben, bezeichnen sie dasselbe Objekt in \mathbb{R}^3 . Der Übersichtlichkeit halber werden wir in dieser Aufgabenlösung jeden Vektor jeweils mit einem Index versehen, der angibt in welcher Basis er gerade dargestellt wird. Im konkreten Fall würden wir also

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

schreiben.

Streng genommen ist also eine Aussage, wie $v = (1, 2, 3)$ ohne Bedeutung, solange man keine Basis zuweist, aber in der Praxis gibt es dieses Problem eigentlich nicht. Zum einen ist, wenn die Basis von Bedeutung ist und keine Basis angegeben wird, eigentlich immer die Standardbasis gemeint.^a Auf der anderen Seite gibt es auch viele Eigenschaften, die nicht von einer Basis abhängen. Beispielsweise sind die Rechenregeln für Skalarmultiplikation und Vektoraddition unabhängig von der Basis immer gleich gültig. In diesem Fall bedeutet $v = (1, 2, 3)$ nur, dass wir annehmen, dass der Vektor in irgendeiner Basis so aussieht. Wenn wir lineare Abbildungen als Matrizen darstellen, könnte man streng genommen auch fordern, dass man stets angibt, welche Basis man für die Domäne und den Zielbereich verwendet, aber die meisten interessanten Eigenschaften sind unabhängig von der Basiswahl. Beispielsweise hat die Abbildungsmatrix einer Abbildung f immer die gleiche Determinante, egal in welcher Basis wir den Vektorraum darstellen.

^aMeiner Meinung nach sollte in einer Rechnung in der die Basis von Bedeutung ist *und* in der mehr als eine Basis vorkommt, immer angegeben werden, in welcher Basis ein Vektor gerade dargestellt wird. Ich glaube aber, dass das eine eher unübliche Praxis ist.

Die Basiswechselmatrix dient nun gerade dazu, diese Darstellungen ineinander umzuführen. Im Beispiel von gerade eben gilt also

$$T_{E,B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E$$

wobei hier die Indizes eigentlich überflüssig sind, da man sich die jeweilige Basis aus dem Kontext erschließen kann.

Auch hier betrachten wir wieder zwei Lösungen. Zum einen die Lösung ohne Invertierung von Matrizen und die Lösung mit Invertierung von Matrizen (Die erste ist für die Klausur denke ich nicht von Bedeutung, da man dann Matrizen invertieren darf.).

Wir wollen die Matrix $T_{B,E}$ bestimmen, die in der Standardbasis dargestellte Vektoren erhält und uns in der B -Basis dargestellte Vektoren zurückgibt. Es reicht, wenn das Komponentenweise geschieht, denn

$$T_{B,E} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_E = T_{B,E} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E + T_{B,E} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}_E + T_{B,E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_E$$

Wir wollen also für jeden der Standardbasisvektoren eine Darstellung in der B -Basis finden. Wir müssen also nun drei Gleichungssysteme mit je drei Gleichungen und drei Unbekannten lösen, also z.B. $e_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$, das heißt

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

In diesem Fall sehen wir aus der zweiten Gleichung, dass $\alpha_2 = -\alpha_3$ gilt. Aus der dritten Gleichung erhalten wir nun $\alpha_1 = 0$. Setzen wir das in die erste Gleichung ein erhalten wir $1 = -\alpha_3 + 2\alpha_3$, also $\alpha_3 = 1$ und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Analog lösen wir die beiden anderen Gleichungssysteme. Es gilt für den zweiten Vektor

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 1 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

Wir ziehen die dritte Gleichung von der ersten ab und erhalten $\alpha_3 = 0$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein erhalten wir $\alpha_2 = 1$ und damit aus einer der beiden anderen Gleichungen $\alpha_1 = -1$. Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

und für den dritten Vektor

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

Ziehen wir die dritte von der ersten Gleichung ab erhalten wir $\alpha_3 = -1$ und damit aus der zweiten Gleichung $\alpha_2 = 1$. Setzen wir das in eine der anderen Gleichungen ein erhalten wir $\alpha_1 = 1$ und

damit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

Allgemein gilt: Ist M eine Matrix mit Spalten S_1, \dots, S_n , dann gilt

$$Me_j = S_j$$

wobei wir hier mit e_j den Vektor meinen, der eine 1 an der j -ten Stelle hat und sonst überall Nullen - unabhängig von Basen. Da aber die Standardbasisvektoren in der Standardbasis genau so aussehen, können wir die Basiswechselmatrix erhalten, indem wir die gewünschten Bilder nebeneinander schreiben. Es gilt also

$$T_{B,E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das ist wieder eine umständliche Rechnung. Wie in der ersten Aufgabe wollen wir einen einfacheren Weg suchen. Seien nun C, D zwei beliebige Basen von V . Wir sehen, dass $T_{C,D}T_{D,C} = \mathbb{1}_n$ gelten muss, da dies eine Matrix ist, die einen Vektor in C -Basis erhält und ihn in der gleichen Basis wieder ausgibt, ihn also unverändert lassen muss. Da das für alle Vektoren gilt, muss das Produkt die Identität sein. Es gilt also $T_{C,D} = T_{D,C}^{-1}$. Der schnellere Weg ist also, die Matrix zu invertieren:

Wir wollen die Basiswechselmatrix von E nach B bestimmen. Die umgekehrte Basiswechselmatrix $T_{E,B}$ können wir aber direkt ablesen, da wir bereits die Darstellung der Vektoren b_1, b_2, b_3 in der Standardbasis kennen. Wir verwenden, dass die Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren sind. Beispielsweise muss also gelten

$$T_{E,B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$

also ist b_1 in der E -Basis auch die erste Zeile der Matrix. Es gilt also

$$T_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $T_{B,E} = T_{E,B}^{-1}$, also invertieren wir die Matrix mithilfe des Gaußverfahrens:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{III-I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{II-III} \\ \text{I-2III} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{I-II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

und können die Matrix nun auf der rechten Seite ablesen. Es gilt also

$$T_{B,E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei \mathbb{K} ein Körper und seien V, U Vektorräume über \mathbb{K} . Sei $f : U \rightarrow V$ eine injektive (surjektive) Abbildung. Zeige, dass $f^* : V^* \rightarrow U^*$ surjektiv (injektiv) ist.

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definition einer dualen Abbildung:

Seien U, V Vektorräume über \mathbb{K} und $f : U \rightarrow V$ eine Abbildung. Dann ist die duale Abbildung definiert durch

$$\begin{aligned} f^* : V^* &\rightarrow U^* \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Wir wollen uns kurz überlegen, wieso das Sinn macht:

Ist eine Abbildung $g \in V^*$ gegeben, dann ist g eine lineare Abbildung von V nach \mathbb{K} . f ist eine lineare Abbildung von U nach V , also ist $g \circ f$ eine lineare Abbildung von U nach \mathbb{K} , also ein Element von U^* .

1. Sei f eine injektive Abbildung. Wir wollen zeigen, dass f^* surjektiv ist. Sei dafür eine lineare Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben, wir müssen ein Urbild finden, also eine lineare Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{K}$, sodass $h = g \circ f = f^*(g)$.

Sei dazu u_1, \dots, u_k eine Basis von U . Da f eine injektive Abbildung ist, sind damit die Vektoren $f(u_1), \dots, f(u_k)$ linear unabhängig in V . Damit können wir sie zu einer Basis $B = f(u_1), \dots, f(u_k), w_1, \dots, w_l$ von V ergänzen. (Falls $\dim(U) = \dim(V)$, dann ist eben $l = 0$ und wir haben bereits eine Basis.)

Jede lineare Abbildung ist bereits durch ihre Wirkung auf Basisvektoren bestimmt, also reicht es, wenn wir uns für unser g überlegen, wie g auf jeden dieser Basisvektoren wirkt.

Wir kennen bereits die Wirkung von h auf alle Basisvektoren, also können wir folgende Abbildung definieren:

$$\hat{g}: B \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \begin{cases} h(u_j), & x = f(u_j) \\ 0, & x = w_j \end{cases}$$

Wir definieren die Abbildung hier vollständig, da wir als Definitionsbereich nur die oben gewählte Basis betrachten. Die Wirkung auf die Basisvektoren $f(v_j)$ ist dabei festgelegt, aber die Wirkung auf die Basisvektoren w_j ist beliebig, wir könnten statt 0 also jeden beliebigen anderen Wert in \mathbb{K} wählen. Diese Abbildung ergänzen wir nun linear zu einer Abbildung $g: U \rightarrow V$, das heißt

$$g: V \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k) + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_l w_l \mapsto \alpha_1 \hat{g}(f(u_1)) + \dots + \hat{g}(f(u_k))$$

und wir haben unsere Abbildung gefunden, denn nun gilt für einen beliebigen Vektor $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in V$, dass

$$f^*(g)(u) = (g \circ f)(u) = g(f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)) = \alpha_1 \hat{g}(f(u_1)) + \dots + \hat{g}(f(u_k)) = h(u)$$

also ist g ein Urbild von h .

Die Lösung hier ist übrigens sehr ausführlich - normalerweise würde ich g eher wie folgt definieren: Wir definieren g über seine Wirkung auf Basisvektoren. Es gilt dabei $g(f(u_j)) = h(u_j)$ und $g(w_j)$ beliebig, beispielsweise $g(w_j) = 0$.

2. Sei f eine surjektive Abbildung. Wir wollen zeigen, dass f^* injektiv ist. Wir verwenden dazu die Eigenschaft, dass Homomorphismen genau dann injektiv sind, wenn ihr Kern trivial ist. Sei also $g \in \ker(f^*)$, das heißt $g \circ f = 0$, wobei 0 die triviale Abbildung ist. Es gelte also $\forall u \in U: g(f(u)) = 0$.

Sei nun v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Da f surjektiv ist, gibt es Urbilder $u_1, \dots, u_n \in U$ mit $f(u_j) = v_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Da $g(f(u)) = 0$ für alle Vektoren gilt, gilt es natürlich auch für die Vektoren u_1, \dots, u_n . Somit gilt für alle j :

$$0 = g(f(u_j)) = g(v_j)$$

Da g alle Basisvektoren auf 0 abbildet und damit auch jeden Vektor auf 0 abbildet, kann g nur die triviale Abbildung $g = 0$ sein. Das heißt f^* hat trivialen Kern und ist damit injektiv.

Aufgabe 4

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und seien $U_1, U_2 \leq V$ Untervektorräume. Sei B_j eine Basis von U_j für $j \in \{1, 2\}$. Sei $f: U_1 \rightarrow U_2$ eine lineare Abbildung und sei A die Darstellungsmatrix dieser Abbildung in den Basen B_1 nach B_2 . Finde die Darstellungsmatrix von $f^*: U_1^* \rightarrow U_2^*$ in den dualen Basen.

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definition von Darstellungsmatrizen:

Sei \mathbb{K} ein Körper, seien V, W Vektorräume über \mathbb{K} und sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sind B eine Basis von V und C eine Basis von W , dann definieren wir die *Darstellungsmatrix*

von f bezüglich der Basen B nach C $M_{C,B}(f)$ durch

$$(M_{C,B}(f)v_B)_C = f(v_B)_C$$

Das wollen wir kurz erläutern. Die obigen Indizes B, C sind wie bereits in Aufgabe 2 als Hinweis auf die verwendete Basis zu verstehen. In der Praxis wird man sie also selten finden. Die Idee ist folgende: Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ wirkt auf ein Element in V und gibt ein Element in W zurück. Das geschieht Basisunabhängig. Das heißt um eine solche Abbildung zu definieren benötigt man erstmal keine Basis. Wollen wir aber konkret, das heißt mit Zahlen, mit dieser Abbildung rechnen, geschieht das immer bezüglich einer Basis von V und einer Basis von W . Wenn die Abbildung auf jeden Vektor unabhängig von seiner Darstellung wirken soll, muss sich die Abbildungsmatrix aber mit der Basis ändern und deswegen benötigen wir die Definition einer basisabhängigen Abbildungsmatrix.

Man kann sich das auch so überlegen: Haben wir einen Vektor $v \in V$ und zwei Basen B_1, B_2 von V , dann ist die Darstellung von v in diesen Basen im Allgemeinen unterschiedlich. Genauso gilt das für $f(v) \in W$ mit zwei Basen C_1, C_2 von W . Wir wollen nun unsere Abbildungsmatrizen abhängig von den Basen so wählen, dass es keinen Unterschied machen würde, ob wir die Abbildungsmatrix $M_{C_1, B_1}(f)$ auf den Vektor v_{B_1} wirken lassen und somit ein Ergebnis in der Basis C_1 erhalten, oder ob wir die Abbildungsmatrix M_{C_2, B_2} auf den Vektor v_{B_2} wirken lassen, einen Vektor $f(v)_{C_2}$ erhalten und das Ergebnis dann mithilfe einer Basiswechselmatrix in C_1 darstellen. Daraus folgt auch, dass folgende Gleichung gilt muss, damit wir Basiswechselmatrizen und Darstellungsmatrizen sinnvoll definiert haben (natürlich ist das noch kein Beweis):

$$M_{C_2, B_2}(f) = T_{C_2, C_1} M_{C_1, B_1}(f) T_{B_1, B_2}$$

Natürlich gilt für Darstellungsmatrizen auch stets, dass sie auf einen Vektor komponentenweise wirken. Haben wir eine geordnete Basis $B = b_1, \dots, b_n$, so hat jeder Basisvektor b_j in seiner eigenen Basis eine Darstellung als Standardvektor e_j , das heißt eine 1 an der j -ten Stelle und 0 sonst. Für eine Matrix A gilt stets, dass das Bild des Vektors e_j die j -te Zeile der Matrix ist. Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Ist C nun eine Basis von W mit Vektoren c_1, \dots, c_m und gilt $(f(b_j))_C = \alpha_{1,j}c_1 + \dots + \alpha_{m,j}c_m$ dann gilt für die Darstellungsmatrix $M_{C,B}(f)$

$$M_{C,B}(f) = \begin{pmatrix} f(b_1)_C & f(b_2)_C & \dots & f(b_n)_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Wir verwenden diese Darstellung in folgender Lösung:

Wir geben zuerst den Basisvektoren Namen: Sei U_1 ein n -dimensionaler Unterraum und U_2 ein m -dimensionaler Unterraum, dann definieren wir

$$\begin{aligned} B_1 &= (b_1, \dots, b_n) \\ B_2 &= (c_1, \dots, c_m) \end{aligned}$$

und die dazu dualen Basen

$$\begin{aligned} D_1 &= B_1^* = (d_1, \dots, d_n) \\ D_2 &= B_2^* = (g_1, \dots, g_m) \end{aligned}$$

Wir haben die Darstellungsmatrix $A = M_{B_2, B_1}(f)$ gegeben, sie hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

also wissen wir, dass für jeden Vektor $b_j \in B_1$ gilt, dass

$$f(b_j) = \alpha_{1,j}c_1 + \dots + \alpha_{m,j}c_m = \sum_{k=1}^m \alpha_{k,j}c_k$$

gilt. Wir wollen die Darstellungsmatrix von f^* bezüglich der Basen D_2 nach D_1 bestimmen und überlegen uns dabei zu jedem Eintrag, wie dieser aussehen muss. Aufgrund der Struktur einer Darstellungsmatrix wissen wir, dass gilt

$$M_{D_1, D_2}(f^*) = (f^*(g_1)_{D_1} \quad f^*(g_2)_{D_1} \quad \dots \quad f^*(g_m)_{D_1})$$

also bestimmen wir $f^*(g_j)$ und die Darstellung in der dualen Basis D_1 . Ein Vektor $q \in U_1^*$ hat dabei die Darstellung $q = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n$, also gilt $q(b_j) = \lambda_j$, da per Definition der dualen Basis $d_k(b_j) = \delta_{k,j}$ gilt. Wollen wir also für das Bild des j -ten Basisvektors in der D_1 -Basis die k -te Komponente wissen, lassen wir den ganzen Vektor auf b_k wirken. Es gilt:

$$\begin{aligned} (f^*(g_j))(b_k) &= (g_j \circ f)(b_k) \\ &= g_j(f(b_k)) \\ &= g_j\left(\sum_{l=1}^m \alpha_{l,k}c_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^m \alpha_{l,k}g_j(c_l) \\ &= \alpha_{j,k} \end{aligned}$$

wobei wir auch verwendet haben, dass $g_j(c_k) = \delta_{j,k}$ gilt, da D_2 die duale Basis zu B_2 ist. Wir tragen das nun in unsere Matrix ein:

$$M_{D_1, D_2}(f^*) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{m,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

also genau die transponierte Matrix zu A .