Lineare Algebra 1

Beispielaufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe 1. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_7 \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Bestimme alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{array}{ccccccc} [3]_7 \cdot x_1 & + & [5]_7 \cdot x_2 & + & [2]_7 \cdot x_3 & = & [1]_7 \\ [1]_7 \cdot x_1 & + & & & [4]_7 \cdot x_3 & = & [1]_7 \\ [5]_7 \cdot x_1 & + & [3]_7 \cdot x_2 & + & & = & [1]_7 \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 2. Betrachte die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \qquad \widehat{A} := \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^{4\times4}$$

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \qquad \widehat{B} := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^{4\times4}$$

i) Berechne jeweils die Determinanten der einzelnen Matrizen.

ii) Entscheide, ob die Matrizen invertierbar sind.

iii) Berechne jeweils die Inverse der invertierbaren Matrizen.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i) Zeige, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C} := \{c_1, c_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

ii) Bezeichne mit $\widehat{\mathcal{B}}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und mit $\widehat{\mathcal{C}}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch folgende darstellende Matrix bezüglich der Standardbasen gegeben ist:

$$A := A_{f,\widehat{\mathcal{B}},\widehat{\mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die darstellende Matrix $A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$