Lineare Algebra 1

Beispielaufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe 1. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_7 \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Bestimme alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{array}{ccccccc} [3]_7 \cdot x_1 & + & [5]_7 \cdot x_2 & + & [2]_7 \cdot x_3 & = & [1]_7 \\ [1]_7 \cdot x_1 & + & & & [4]_7 \cdot x_3 & = & [1]_7 \\ [5]_7 \cdot x_1 & + & [3]_7 \cdot x_2 & + & & = & [1]_7 \end{array} \tag{1}$$

Lösungsvorschlag. Wir schreiben das LGS zunächst in die Form $Ax = b$ um:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [3]_7 & [5]_7 & [2]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [4]_7 \\ [5]_7 & [3]_7 & [0]_7 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} [1]_7 \\ [1]_7 \\ [1]_7 \end{pmatrix}}_{=:b}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass der Lösungsraum eines LGS unter elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten bleibt. Wir vereinfachen also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [3]_7 & [5]_7 & [2]_7 & [1]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [4]_7 & [1]_7 \\ [5]_7 & [3]_7 & [0]_7 & [1]_7 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1+[2]_7\cdot z_2]{z_1+[4]_7\cdot z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} [0]_7 & [5]_7 & [4]_7 & [5]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [4]_7 & [1]_7 \\ [0]_7 & [3]_7 & [1]_7 & [6]_7 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1+[2]_7\cdot z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [0]_7 & [0]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [4]_7 & [1]_7 \\ [0]_7 & [3]_7 & [1]_7 & [3]_7 \end{array}\right) \xrightarrow{[5]_7\cdot z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} [0]_7 & [0]_7 & [0]_7 & [0]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [4]_7 & [1]_7 \\ [0]_7 & [1]_7 & [5]_7 & [1]_7 \end{array}\right) =: (\widetilde{A} \,|\, \widetilde{b})$$

Da nur elementare Zeilenumformungen verwendet wurden, gilt also für die jeweiligen Lösungsräume:

$$\mathscr{L}_{A,b} = \mathscr{L}_{\widetilde{A},\widetilde{b}}$$

Man sieht schnell, dass eine spezielle Lösung für das obige LGS durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist - nämlich indem man die einzige freie Variable x_3 gleich 0 setzt.
Wir müssen zuletzt also noch den Lösungsraum des homogenen LGS bestimmen. Da auch dieser nach Vorlesung unter elementaren Umformungen erhalten bleibt, gilt:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_A^{\text{homogen}} = \mathscr{L}_{\widetilde{A}}^{\text{homogen}} &= \{x \in \mathbb{F}_7^3 | \widetilde{A}x = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{F}_7^3 | x_1 + [4]_7 \cdot x_3 = [0]_7 \wedge x_2 + [5]_7 = [0]_7\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{F}_7^3 | x_1 = [3]_7 \cdot x_3 \wedge x_2 = [2]_7 \cdot x_3\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{F}_7} \left\{ \begin{pmatrix} [3]_7 \\ [2]_7 \\ [1]_7 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Damit ist der Lösungsraum von (1) der affine $\mathbb{F}_7$-Unterraum

$$\mathscr{L}_{A,b} = x_0 + \mathscr{L}_A^{\text{homogen}} = \begin{pmatrix} [1]_7 \\ [1]_7 \\ [0]_7 \end{pmatrix} + \left\langle \left(\begin{array}{c} [3]_7 \\ [2]_7 \\ [1]_7 \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{F}_7}$$

Aufgabe 2. Betrachte die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \widehat{A} := \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^{4\times 4}$$

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \widehat{B} := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^{4\times 4}$$

i) Berechne jeweils die Determinanten der einzelnen Matrizen.
ii) Entscheide, ob die Matrizen invertierbar sind.
iii) Berechne jeweils die Inverse der invertierbaren Matrizen.

Lösungsvorschlag. Bevor wir mit der Bearbeitung der Aufgabe beginnen, bemerken wir, dass $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ **kein** Körper ist. Wir halten vorab schon einmal fest, dass die Menge der invertierbaren Elemente (auch Einheiten genannt) durch

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\}$$

gegeben ist. Dabei sind alle Elemente ihr eigenes Inverses.

i) Wir entwickeln die Determinante von A nach der letzten Zeile und verwenden dann die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= -(-2)\cdot\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 10 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) + 2\cdot\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2\cdot(60+63+24-20-63-72) + 2\cdot(30+72+36-30-72-36) \\ &= 2\cdot(-8) = -16 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich auch sofort die Determinante von $\widehat{A}$ ablesen, nämlich:

$$\det(\widehat{A}) = [\det(A)]_8 = [-16]_8 = 0$$

Für die Berechnung der anderen beiden Determinanten verwenden wir die aus der Vorlesung bekannte Formel der Determinante für 2×2 Matrizen:

$$\det(B) = \det\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = 5\cdot 3 - 6\cdot 2 = 15 - 12 = 3$$

und analog zu oben können wir die Determinante von $\widehat{B}$ direkt ablesen:

$$\det \widehat{B} = [\det(B)]_8 = [3]_8$$

ii) Die Matrizen A und B sind invertierbar, da ihre Determinanten nicht 0 sind (wir erinnern uns: in einem Körper gilt $K^\times = K \setminus \{0\}$).
Die Determinante von $\widehat{B}$ ist in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gleich Null, damit ist $\widehat{B}$ nicht invertierbar.
Zwar ist $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ kein Körper, jedoch ist 3 in $\mathbb{Z}_8$ invertierbar, denn es ist $[3]_8 \cdot [3]_8 = [9]_8 = [1]_8$. Damit ist $\widehat{B}$ invertierbar.

iii) Wir wollen nun die Inversen zu $A, B, \widehat{B}$ bestimmen. Wir haben bereits mehrere mögliche Vorgehensweisen kennen gelernt:

1. elementare Zeilenumformungen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 9 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_2-2z_1 \\ z_3-z_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{13}{3} & 4 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-1\cdot z_2 \\ \frac{3}{8}\cdot z_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -4 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_4+2z_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -4 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -4 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_1-2z_4 \\ z_2+4z_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{12} & 0 & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_1-\frac{4}{3}z_3 \\ z_2+\frac{13}{3}z_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -1 & \frac{25}{8} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{z_1-3z_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{8} & 3 & -\frac{85}{8} & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -1 & \frac{25}{8} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & 3 & -\frac{85}{8} & -7 \\ -\frac{3}{8} & -1 & \frac{25}{8} & 2 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Berechnung mit Hilfe der Adjunkten: wir berechnen also die einzelnen Einträge der Adjunkten z.B. unter Verwendung der Regel von Sarrus:

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -30$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 6$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$A_{1,4} = (-1)^{1+4} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -48$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 16$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$A_{2,4} = (-1)^{2+4} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 170$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -50$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = -6$$

$$A_{3,4} = (-1)^{3+4} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = -6$$

$$A_{4,1} = (-1)^{4+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = 112$$

$$A_{4,2} = (-1)^{4+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = -32$$

$$A_{4,3} = (-1)^{4+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$A_{4,4} = (-1)^{4+4} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = -8$$

Wir erhalten also insgesamt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A}^t = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -48 & 170 & 112 \\ 6 & 16 & -50 & -32 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & 3 & -\frac{85}{8} & -7 \\ -\frac{3}{8} & -1 & \frac{25}{8} & 2 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Um die Inversen von B und $\widehat{B}$ zu bestimmen, können wir die Formel für die Inverse von 2×2-Matrizen aus der Vorlesung verwenden. Für eine invertierbare Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$M^{-1} = (\det(M))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}$ ist $3^{-1} = \frac{1}{3}$, und somit erhalten wir

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ hingegen ist $3^{-1} = 3$, und damit

$$\widehat{B}^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i) Zeige, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C} := \{c_1, c_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

ii) Bezeichne mit $\widehat{\mathcal{B}}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und mit $\widehat{\mathcal{C}}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch folgende darstellende Matrix bezüglich der Standardbasen gegeben ist:

$$A := A_{f,\widehat{\mathcal{B}},\widehat{\mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die darstellende Matrix $A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

Lösungsvorschlag. i) Wir wissen aus der Übung, dass eine Menge von Vektoren genau dann eine Basis ist, wenn Sie eine maximale linear unabhängige Menge ist. Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, reicht es also zu zeigen, dass die Systeme $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\det(B) = 1 \neq 0 \qquad \det(C) = 2\dot{2} - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Dann ist die darstellende Matrix bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} &= M_{\mathrm{id},\mathcal{C},\widehat{\mathcal{C}}} \cdot A_{f,\widehat{\mathcal{B}},\widehat{\mathcal{C}}} \cdot M_{\mathrm{id},\widehat{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = C^{-1} \cdot A \cdot B \\ &= \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$